Tentamen i Krypteringsmetoder och Säkring av Datasystem

7.5 hp

20 mars, 2015 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg 3, 18p: betyg 4, 24p: betyg 5.
Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare samt formelsamling som medföljer tentamenstexten.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://dixon.hh.se/erja/teach` → `Krypteringsmetoder och säkring av datasystem`.

1. Primtalsfaktorisera 100 504 008. (3p)

2. Vad kallas den först utvecklade metoden för nyckelutväxling med asymmetriska nycklar som innebar att man inte längre behövde skicka en hemlig nyckel för att ett meddelande ska kunna överföras via en krypterad förbindelse? (3p)

3. Beräkna $\text{lcm}(2\,772, 2352)$, d.v.s. minsta gemensamma multipel av 2 772 och 2 352. (3p)

4. Vad kallas det kontrollvärde som man kan använda för att bekräfta äktheten hos t.ex. nedladdad programvara. (2p)

5. Genom att bilda den text som man får av att systematiskt ta med vart n:te tecken från en originaltext, kan man läsa ett meddelande som gömts bland de andra tecknen (steganografi). Men om man gör detta för alla möjliga olika delmängder av originaltext och för tillräckligt många olika tal n så kommer man hitta riktiga ord och korta meddelanden av ren slump. Vad kallas detta fenomen som 1994 exemplifierades och lanserades av den Sovjetisk-Israeliske matematikern Eliyah Rips?(3p)

6. Man vill signera ett dokument som uttrycks med ett enda långt tal, $m = 4997$, m.h.a. RSA signering och väljer hashfunktionen
$$h(m) = m(m+1) \pmod{1000}$$
primtalen $p = 79$ och $q = 73$ och vidare privat signeringsnyckel a och verifieringsnyckel d. Beräkna a, d och signaturen av dokumentet m. (4p)

7. Vad innebär egenskapen *empirisk styrka* hos ett krypto? (3p)

8. Vad heter den krypteringsmetod (kallad *Le Chiffre Indéchiffrable*) som innebär att man växlar mellan olika substitutionskrypton enligt ett iterativt schema? (2p)

9. Vid överföring av ett meddelande bestående av 1 098 tecken överförs tecknen oberoende av varandra och varje tecken överförs korrekt med sannolikhet 99%. Vad är
   (a) sannolikhen att minst 1 096 tecken överförs korrekt? (3p)
   (Tips: $0.99^{1096} = 1.645 \cdot 10^{-5}$.)
   (b) approximativt sannolikheten att minst 1 085 tecken överförs korrekt? (3p)

10. Lös följande system av kongruensekvationer

$$\begin{cases} 235x + 357y \equiv 19 \\ 5711x + 71113y \equiv 23 \end{cases} \pmod{13369}$$ (4p)

LYCKA TILL!

Formelsamling
Formler och tabeller inom Matematik och statistik för IT-forensik
Kursansvarig: Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Matematik

Definition 1 MÄNGDBETECKNINGAR

$\varnothing$ *Tomma mängden*	Ω *Hela utfallsrummet*
$\cup$ *Unionen*	$\cap$ *Snittet*
^{C} *Komplementet*	$\lvert A\rvert$ *Antalet element i* A

Sats 1 ADDITIONSSATSEN
För alla mängder A *och* B *gäller att* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Sats 2 DE MORGANS LAGAR
För alla mängder A *och* B *gäller att* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ *och* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Sats 3 EXPONENTLAGARNA
$a^{b+c} = a^b a^c$, $a^{bc} = (a^b)^c = (a^c)^b$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *och* $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

Sats 4 LOGARITMLAGARNA
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(b^c) = c \log_a b$, $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

Sats 5 KVADRERINGSREGLERNA
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *och* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Sats 6 ANDRAGRADSEKVATIONER
Om $x^2 + px + q = 0$ *så är* $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Sats 7 FAKTORSATSEN
Varje polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x_n$ *av grad* n *har* n *nollställen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *och kan faktoriseras mha dessa enligt* $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

Sats 8 SAMBANDET MELLAN KOEFFICIENTER OCH RATIONELLA RÖTTER
Om ekvationen

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

har en rationell rot $x = p/q$ *så måste* a_0 *vara mulitpel av* p *och* a_n *vara mulitipel av* q.

Algoritm 1 DIVISIONSALGORITMEN
För alla heltal a och $b \neq 0$ finns det heltal k och r sådana att $0 \leq r \leq |b| - 1$ och

$$\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}$$

där talet k kallas **kvot** *och talet r kallas* **(principal) rest***.*

Definition 2
Ett **primtal** *är ett heltal som inte är jämnt delbart med något annat heltal andra än 1 och sig självt.*

Algoritm 2 ERATOSTHENES SÅLL
Antag att man vill generera alla primtal $\leq n$.

1. *Gör en lista över alla heltal fr o m 2 t o m n.*
2. *Ringa in det första icke strukna eller inringade talet.*
3. *Stryk alla multipler av det senast inringade talet från resten av listan.*
4. *Om inte alla tal $\leq \sqrt{n}$ är inringade eller strukna, gå tillbaks till steg 2.*
5. *Då alla tal som är $\leq \sqrt{n}$ behandlats är de icke strukna talen primtalen.*

Definition 3
Den **största gemensamma delaren***, $\gcd(a, b)$, för två heltal, a och b, är produkten av alla primtalsfaktorer som är gemensamma i a och b.*

Definition 4
Heltalen a och b kallas **relativt prima** *om $\gcd(a, b) = 1$.*

Algoritm 3 EUKLIDES ALGORITM
För att bestämma $\gcd(a, b)$, där $a > b$, bestäm $r_1, r_2, r_3, \ldots$ så att

$$\left\{ \begin{array}{lcll} a & = & c_1 b + r_1 & \text{där } 0 \leq r_1 \leq |b| - 1 \\ b & = & c_2 r_1 + r_2 & \text{där } 0 \leq r_2 \leq r_1 - 1 \end{array} \right.$$

och fortsättningsvis

$$\left\{ \begin{array}{rcll} r_1 & = & c_3 r_2 + r_3 & \text{där } 0 \leq r_3 \leq r_2 - 1 \\ r_2 & = & c_4 r_3 + r_4 & \text{där } 0 \leq r_4 \leq r_3 - 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ r_{n-2} & = & c_n r_{n-1} + r_n & \text{där } 0 \leq r_n \leq r_{n-1} - 1 \\ r_{n-1} & = & c_n r_n + 0 & (\text{där alltså } r_{n+1} = 0) \end{array} \right.$$

Den första resten r_i som är $= 0$ (dvs r_{n+1} i förklaringen ovan) kallas den **första försvinnande** *resten, den senaste resten innan den (r_n i förklaringen ovan) kallas den* **sista icke-försvinnande** *resten. Och det är den sista icke-försvinnande resten som är $\gcd(a, b)$.*

Definition 5
Låt a och b vara heltal. Det minsta tal, c, sådant att $a = bc$ eller $b = ac$ kallas **minsta gemensamma multipel** *för a och b och betecknas* $\mathrm{lcm}(a, b)$.

Sats 9 $\mathrm{lcm}(a, b) = \dfrac{ab}{\gcd(a, b)}$ *för alla heltal a och b.*

Algoritm 4 Lösning av diofantisk ekvation
För att lösa den diofantiska ekvationen $ax + by = c$

1. *beräkna $d = \gcd(a, b)$ mha Euklides algoritm.*
2. *Om inte c är en multipel av d så saknar ekvationen heltalslösningar.*
3. *Om c är en multipel av d, låt $k = \frac{c}{d}$.*
4. *Lös* **hjälpekvationen** *$ax + by = d$ mha Euklides algoritm baklänges $\Rightarrow \quad (x_0, y_0)$.*
5. *Allmän lösning till den fullständiga $ax + by = c$ är då $\{(kx_0 + bn, ky_0 - an), n \in \mathbb{Z}\}$.*

Sats 10 Resträkning
Om $a \equiv r$ och $b \equiv s \pmod{c}$, så är $a + b \equiv r + s \pmod{c}$.
Om $a \equiv r$ och $b \equiv s \pmod{c}$, så är $ab \equiv rs \pmod{c}$.
Om $a \equiv r \pmod{c}$, så är $a^b \equiv r^b \pmod{c}$.

Definition 6 *Den* **diskreta (multiplikativa) inversen** *till x mod n är ett tal b som satisfierar $ab \equiv 1 \pmod{n}$.*

Definition 7 *Den* **diskreta a-logaritmen** *till x mod n är ett tal b som satisfierar $a^x \equiv b \pmod{n}$.*

Algoritm 5 Fermats faktoriseringsmetod
Antag att man vill faktorisera det udda *talet N, dvs man vill hitta heltal, p och q, sådana att $N = pq$. Då kan man göra enligt följande procedur. Om talet man vill faktorisera är ett jämnt tal, bryt ut faktorn 2 och fortstt tills ett udda tal, N, erhålls.*

1. *Låt (initialt) $x = 1 + [\sqrt{N}]$*
2. *Beräkna $x^2 - N$.*
3. *Om $x^2 - N$ är en jämn kvadrat (dvs om $\sqrt{x^2 - N}$ är ett heltal), låt $p = x + \sqrt{x^2 - N}$ och $q = x - \sqrt{x^2 - N}$ och gå till 6.*
4. *Om $x - \sqrt{x^2 - N} < 2$, låt $p = N$ och $q = 1$ och gå till 6.*
5. *Addera 1 till x och gå till 2.*
6. *Klart!*

Om faktoriseringen blir $N = N \cdot 1$ (såsom det kan i steg 4. ovan) så är talet N ett primtal.

Sats 11 Summeringsregler

$$\sum_{k=1}^{n} a\, b_k \;=\; a\sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \;+\; \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a \;=\; (n-m+1)a \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \;+\; \sum_{k=1}^{m-1} a_k$$

Sats 12 Speciella regler

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k \;=\; \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad \text{om } a \neq 1 \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) \;=\; a_n - a_0$$

Sats 13 Deriveringsregler

Om f och g är funktioner av variabeln x och a en konstant så gäller

1. $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(af) = a\frac{df}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(a) = 0$
4. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ *om* $n \neq 0$
5. $\frac{d}{dx}(f \cdot g) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(e^f) = \frac{df}{dx} \cdot e^f$
7. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
8. *Kedjeregeln:* $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{dg}{dx}(x) \cdot \frac{df}{dx}(g(x))$

Sats 14 *Om f är en deriverbar funktion så gäller att*
$\frac{df}{dx}(x) < 0$ *om och endast om f är avtagande genom x,*
$\frac{df}{dx}(x) > 0$ *om och endast om f är växande genom x.*

Sats 15 Binomialkoefficienter

Antalet sätt att välja k element bland n möjliga (utan återläggning och utan hänsyn till ordningen) är

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{där} \quad n! = \prod_{j=1}^{n} j$$

Sats 16 Binomialsatsen

För alla reella tal a och b och positiva heltal n är

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Matematisk statistik

Definition 8 SANNOLIKHET
Om ett experiment har m möjliga utfall varav g är gynnsamma för händelsen A, så är **sannolikheten** *för A vilket betecknas $P(A) = g/m$.*

Sats 17 KOMPLEMENTSATSEN
$P(A^C) = 1 - P(A)$

Sats 18 ADDITIONSSATSEN
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definition 9
En **slumpvariabel**, *X, är en (vanligtvis numerisk) generalisering av ett experiment. Mha slumpvariabeln kan olika händelser formuleras som att X har vissa värden. En slumpvariabels* **utfallsrum**, *Ω_X, är mängden av de värden som slumpvariabeln kan anta.*

Definition 10
A och B är **oberoende** *händelser om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*
Två slumpvariabler, X och Y med utfallsrum Ω_X resp. Ω_Y, är **oberoende** *om $P(X \in M_X, Y \in M_Y) = P(X \in M_X)P(Y \in M_Y)$ för alla $M_X \subseteq \Omega_X$ och $M_Y \subseteq \Omega_Y$.*

Sats 19 BINOMIALFÖRDELNING
Om $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ där $P(Y_k = 1) = p$ och $P(Y_k = 0) = 1-p$ för alla $k = 1, 2, \ldots n$ och variablerna $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ är oberoende av varandra, så är $\boldsymbol{X \in Bin(n, p)}$ (dvs X är **binomialfördelad** *med n och p) vilket innebär att dess sannolikhetsfunktion är $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ där $k \in \{0, 1, \ldots, n\} = \Omega_X$, $E(X) = np$ och $V(X) = np(1-p)$.*

Sats 20 POISSONFÖRDELNING
Om X är Poissonfördelad med intensitet λ betecknas detta $X \in Poi(\lambda)$ och innebär att $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ där $x \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \Omega_X$, $E(X) = \lambda$ och $V(X) = \lambda$. Dessutom gäller att $X \in Poi(\lambda_X) \perp Y \in Poi(\lambda_Y) \Rightarrow X + Y \in Poi(\lambda_X + \lambda_Y)$.

Sats 21 NORMALFÖRDELNING
Denna betecknas $N(\mu, \sigma^2)$ där μ är väntevärde och σ^2 är varians. Om $X \in N(0, 1)$ kallas X **standard normalfördelad**, *och dess fördelningsfunktion är $\Phi(x) = P(X \leq x)$ för alla $x \in \mathbb{R} = \Omega_X$. Om $X \in N(\mu, \sigma^2)$ så är $P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ för alla $x \in \mathbb{R} = \Omega_X$.*
Symmetri*: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.*
Sannolikheter*: $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ för all $a < b \in \mathbb{R}$.*

Definition 11 Väntevärdet *av en slumpvariabel X betecknas $E(X)$ och är tyngdpunkten i sannolikhetsfunktionen respektive täthetsfunktionen för x. Linjaritet: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.* **Variansen** *av en slumpvariablel X betecknas $V(X)$ och definieras $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Räkneregel: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. För diskreta variabler X är $E(g(X)) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)P(X = x)$.*

Sats 22 CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN (CGS)
Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *är oberoende och lika fördelade med* $E(X_i) = \mu$ *och* $V(X_i) = \sigma^2$ *så är approximativt* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \in N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ *och* $\sum_{i=1}^n X_i \in N(n\mu, n\sigma^2)$ *då* n *är stort.*

Definition 12 BESKRIVANDE STATISTIK

Medelvärde: $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$

Stickprovsvarians: $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right)$

Stickprovskorrelation: $R = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$

Definition 13 KONFIDENSINTERVALL
Antag $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *är oberoende och normalfördelade* $N(\mu, \sigma^2)$. *Då gäller att ett* $100(1-\alpha)\%$ **konfidensintervall** *för*

$$\mu \text{ är } \begin{cases} \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{om } \sigma^2 \text{ är känd} \\ \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} & \text{om } \sigma^2 \text{ är okänd} \end{cases}$$

Definition 14 HYPOTESTEST
Antag $X_1, \ldots, X_n$ *är ett stickprov på* $X \in N(\mu, \sigma^2)$. *För att testa hypotesen*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \in M_\mu \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \in M_\sigma \end{cases}$$

används teststatistikan U *vid signifikansnivån* α. *Testregeln är*

$$\begin{cases} \text{Förkasta } H_0 \text{ om } A_\alpha \\ \text{Förkasta inte } H_0 \text{ om inte } A_\alpha \end{cases}$$

θ	H_0	H_1	u	A_α
μ (σ^2 känd)	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$u < -\lambda_\alpha$
		$\mu > \mu_0$		$u > \lambda_\alpha$
		$\mu \neq \mu_0$		$\{\lvert u\rvert > \lambda_{\alpha/2}\}$
μ (σ^2 okänd)	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$u < -t_\alpha(n-1)$
		$\mu > \mu_0$		$u > t_\alpha(n-1)$
		$\mu \neq \mu_0$		$\{\lvert u\rvert > t_{\alpha/2}(n-1)\}$
F_X	$F_X = F_0$	$F_X \neq F_0$	$\sum_{k=1}^K \frac{(o_k-e_k)^2}{e_k}$ där $e_k = NP(X \in I_k)$	$u > \chi^2_\alpha(K-1)$

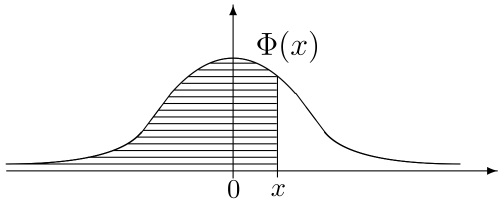
Enkel linjär regression En linjär modell, $Y = aX + b$, som beskriver sambandet mellan slumpvariablerna X och Y baserad på det parade stickprovet $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ är med

$$\hat{a} = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad \text{och} \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$$

med förklaringsgraden

$$R^2 = \frac{\left(n\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)\right)^2}{\left(n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2\right)}$$

Normalfördelningsvärden



Tabell över värden på $\Phi(x) = P(X \leq x)$ där
$X \in N(0,1)$. För $x < 0$ utnyttja relationen $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

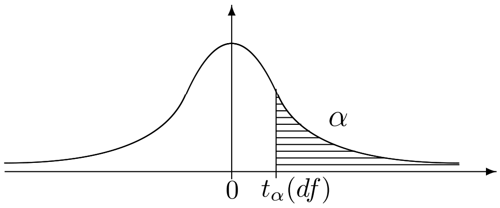
x	+0.0	+0.1	+0.2	+0.3	+0.4	+0.5	+0.6	+0.7	+0.8	+0.9
3	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Normal-percentiler:

Några värden på λ_α sådana
att $P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$
där $X \in N(0,1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.1	1.281552	0.005	2.575829
0.05	1.644854	0.001	3.090232
0.025	1.959964	0.0005	3.290527
0.01	2.326348	0.0001	3.719016

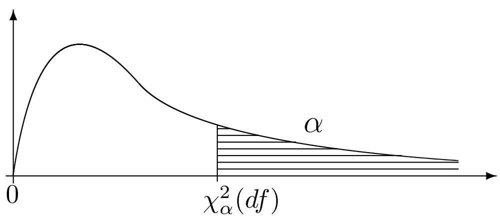
t-percentiler



Tabell över värden på $t_\alpha(df)$.

df \ α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	15.8945	31.8205	63.6567	318.3088
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	4.8487	6.9646	9.9248	22.3271
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	3.4819	4.5407	5.8409	10.2145
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	2.9986	3.7470	4.6041	7.1732
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	2.7565	3.3649	4.0322	5.8934
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	2.6122	3.1427	3.7074	5.2076
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.5168	2.9980	3.4995	4.7853
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.4490	2.8965	3.3554	4.5008
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.3984	2.8214	3.2498	4.2968
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.3593	2.7638	3.1693	4.1437
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.3027	2.6810	3.0545	3.9296
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.2638	2.6245	2.9768	3.7874
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.2238	2.5669	2.8982	3.6458
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.1967	2.5280	2.8453	3.5518
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.1666	2.4851	2.7874	3.4502
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.1470	2.4573	2.7500	3.3852
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.1087	2.4033	2.6778	3.2614
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.0809	2.3642	2.6259	3.1737

χ^2-percentiler



Tabell över värden på $\chi^2_\alpha(df)$.

df \ α	0.999	0.995	0.99	0.95	0.05	0.01	0.005	0.001
1	0.0000	0.0000	0.0002	0.0039	3.8415	6.6349	7.8794	10.8276
2	0.0020	0.0100	0.0201	0.1026	5.9915	9.2103	10.5966	13.8155
3	0.0243	0.0717	0.1148	0.3518	7.8147	11.3449	12.8382	16.2662
4	0.0908	0.2070	0.2971	0.7107	9.4877	13.2767	14.8603	18.4668
5	0.2102	0.4117	0.5543	1.1455	11.0705	15.0863	16.7496	20.5150
6	0.3811	0.6757	0.8721	1.6354	12.5916	16.8119	18.5476	22.4577
7	0.5985	0.9893	1.2390	2.1673	14.0671	18.4753	20.2777	24.3219
8	0.8571	1.3444	1.6465	2.7326	15.5073	20.0902	21.9550	26.1245
9	1.1519	1.7349	2.0879	3.3251	16.9190	21.6660	23.5894	27.8772
10	1.4787	2.1559	2.5582	3.9403	18.3070	23.2093	25.1882	29.5883
12	2.2142	3.0738	3.5706	5.2260	21.0261	26.2170	28.2995	32.9095
14	3.0407	4.0747	4.6604	6.5706	23.6848	29.1412	31.3193	36.1233
17	4.4161	5.6972	6.4078	8.6718	27.5871	33.4087	35.7185	40.7902
20	5.9210	7.4338	8.2604	10.8508	31.4104	37.5662	39.9968	45.3147
25	8.6493	10.5197	11.5240	14.6114	37.6525	44.3141	46.9279	52.6197
30	11.5880	13.7867	14.9535	18.4927	43.7730	50.8922	53.6720	59.7031
50	24.6739	27.9907	29.7067	34.7643	67.5048	76.1539	79.4900	86.6608
100	61.9179	67.3276	70.0649	77.9295	124.342	135.807	140.169	149.449