Tentamen i Krypteringsmetoder och Säkring av Datasystem

7.5 hp

2 juni, 2017

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG.
Hjälpmedel: Miniräknare samt formelsamling som medföljer tentamenstexten.

Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0729-77 36 26, 035-16 76 53.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://dixon.hh.se/erja/teach` → `Krypteringsmetoder och säkring av datasystem.`

1. Nämn 2 önskvärda "resistance"-egenskaper hos hashfunktioner och förklara vad de innebär. (3p)

2. År 1977 konstruerades RSA-kryptot.
   (a) Vad hette upphovsmännen (efernamnen räcker)? (2p)
   (b) Vad var speciellt med detta krypteringssystem jämfört med tidigare system? (3p)
   (c) Hur stora tal måste nycklarna idag bestå av för att erbjuda så pass hög säkerhet att krypteringen kan användas vid banktransaktioner t.ex.? (3p)

3. Faktorisera talet 3 346 410. (3p)

4. Nämn en attack mot Diffie-Hellmans protokoll för nyckelutväxling och förklara kort vad attacken går ut på. (3p)

5. År 1918 grundade Arthur Scherbius firman Scherbius & Ritter och strax därefter uppfann han en berömd krypteringsmaskin – vad hette den? (2p)

6. Augusta har ett myntrör som är exakt 1 meter långt. Hon vill fylla det med enkronor som är 1.1 mm tjocka, femkronor som är 2.1 mm tjocka och tiokronor som är 2.7 mm tjocka. På hur många sätt kan hon göra det så att det blir dubbelt så många tior som femmor och så att röret blir precis fullt? (4p)

7. Vad står förkortningarna PKI och PKIX för? (3p)

8. Ett sätt att lösa problematiken med nyckelöverföring är att låta mottageren, istället för att dekryptera ett mottaget krypterat meddelande, överkryptera det med egen nyckel, skicka tillbaks det till sändaren som dekrypterar det med sin nyckel, ånyo skickar det till mottagaren som slutligen dekrypterar med sin nyckel. Nämn ett krypteringssystem som fungerar med denna typ av förfarande och ett annat system som inte gör det. (3p)

9. För vilka tal n är $8n^3 + 2n^2 - n$ jämnt delbart med 82? (4p)

LYCKA TILL!

Matematik

Definition 1 Mängdbeteckningar

$\varnothing$ *Tomma mängden*	Ω *Hela utfallsrummet*
$\cup$ *Unionen*	$\cap$ *Snittet*
^{C} *Komplementet*	$\lvert A\rvert$ *Antalet element i* A

Sats 1 Additionssatsen
För alla mängder A *och* B *gäller att* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Sats 2 De Morgans lagar
För alla mängder A *och* B *gäller att* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ *och* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Sats 3 Exponentlagarna
$a^{b+c} = a^b a^c$, $a^{bc} = (a^b)^c = (a^c)^b$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *och* $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

Sats 4 Logaritmlagarna *För alla* $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ *och* $d \in \mathbb{R}$ *gäller*
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(b^c) = c \log_a b$, $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

Sats 5 Kvadreringsreglerna
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *och* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Sats 6 Andragradsekvationer
Om $x^2 + px + q = 0$ *så är* $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Sats 7 Faktorsatsen
Varje polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x_n$ *av grad* n *har* n *nollställen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *och kan faktoriseras mha dessa enligt* $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

Sats 8 Sambandet mellan koefficienter och rationella rötter
Om ekvationen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

har en rationell rot $x = p/q$ *så måste* a_0 *vara mulitpel av* p *och* a_n *vara mulitipel av* q.

Algoritm 1 DIVISIONSALGORITMEN
För alla heltal a och $b \neq 0$ finns det heltal k och r sådana att $0 \leq r \leq |b| - 1$ och

$$\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}$$

där talet k kallas **kvot** *och talet r kallas* **(principal) rest**.

Definition 2
Ett **primtal** *är ett heltal som inte är jämnt delbart med något annat heltal andra än 1 och sig självt.*

Algoritm 2 ERATOSTHENES SÅLL
Antag att man vill generera alla primtal $\leq n$.

1. *Gör en lista över alla heltal fr o m 2 t o m n.*
2. *Ringa in det första icke strukna eller inringade talet.*
3. *Stryk alla multipler av det senast inringade talet från resten av listan.*
4. *Om inte alla tal $\leq \sqrt{n}$ är inringade eller strukna, gå tillbaks till steg 2.*
5. *Då alla tal som är $\leq \sqrt{n}$ behandlats är de icke strukna talen primtalen.*

Definition 3
Den **största gemensamma delaren**, $\gcd(a, b)$, *för två heltal, a och b, är produkten av alla primtalsfaktorer som är gemensamma i a och b.*

Definition 4
Heltalen a och b kallas **relativt prima** *om* $\gcd(a, b) = 1$.

Algoritm 3 EUKLIDES ALGORITM
För att bestämma $\gcd(a, b)$, där $a > b$, bestäm $r_1, r_2, r_3, \ldots$ så att

$$\begin{cases} a = c_1 b + r_1 & \text{där } 0 \leq r_1 \leq |b| - 1 \\ b = c_2 r_1 + r_2 & \text{där } 0 \leq r_2 \leq r_1 - 1 \end{cases}$$

och fortsättningsvis

$$\begin{cases} r_1 = c_3 r_2 + r_3 & \text{där } 0 \leq r_3 \leq r_2 - 1 \\ r_2 = c_4 r_3 + r_4 & \text{där } 0 \leq r_4 \leq r_3 - 1 \\ \vdots \quad \vdots & \\ r_{n-2} = c_n r_{n-1} + r_n & \text{där } 0 \leq r_n \leq r_{n-1} - 1 \\ r_{n-1} = c_n r_n + 0 & (\text{där alltså } r_{n+1} = 0) \end{cases}$$

Den första resten r_i som är $= 0$ (dvs r_{n+1} i förklaringen ovan) kallas den **första försvinnande** *resten, den senaste resten innan den (r_n i förklaringen ovan) kallas den* **sista icke-försvinnande** *resten. Och det är den sista icke-försvinnande resten som är* $\gcd(a, b)$.

Definition 5
Låt a och b vara heltal. Det minsta tal, c, sådant att $a = bc$ eller $b = ac$ kallas **minsta gemensamma multipel** *för a och b och betecknas* $\operatorname{lcm}(a, b)$.

Sats 9 $\operatorname{lcm}(a, b) = \dfrac{ab}{\gcd(a, b)}$ *för alla heltal a och b.*

Algoritm 4 Lösning av diofantisk ekvation
För att lösa den diofantiska ekvationen $ax + by = c$

1. *beräkna $d = \gcd(a, b)$ mha Euklides algoritm.*
2. *Om inte c är en multipel av d så saknar ekvationen heltalslösningar.*
3. *Om c är en multipel av d, låt $k = \frac{c}{d}$.*
4. *Lös* **hjälpekvationen** *$ax+by = d$ mha Euklides algoritm baklänges $\Rightarrow \quad (x_0, y_0)$.*
5. *Allmän lösning till den fullständiga $ax+by = c$ är då $\{(kx_0+bn, ky_0-an), n \in \mathbb{Z}\}$.*

Sats 10 Resträkning
Om $a \equiv r$ och $b \equiv s \pmod{c}$, så är $a + b \equiv r + s \pmod{c}$.
Om $a \equiv r$ och $b \equiv s \pmod{c}$, så är $ab \equiv rs \pmod{c}$.
Om $a \equiv r \pmod{c}$, så är $a^b \equiv r^b \pmod{c}$.

Definition 6 *Den* **diskreta (multiplikativa) inversen** *till x mod n är ett tal b som satisfierar $ab \equiv 1 \pmod{n}$.*

Definition 7 *Den* **diskreta a-logaritmen** *till x mod n är ett tal b som satisfierar $a^x \equiv b \pmod{n}$.*

Algoritm 5 Fermats faktoriseringsmetod
Antag att man vill faktorisera det udda *talet N, dvs man vill hitta heltal, p och q, sådana att $N = pq$. Då kan man göra enligt följande procedur. Om talet man vill faktorisera är ett jämnt tal, bryt ut faktorn 2 och fortstt tills ett udda tal, N, erhålls.*

1. *Låt (initialt) $x = 1 + [\sqrt{N}]$*
2. *Beräkna $x^2 - N$.*
3. *Om $x^2 - N$ är en jämn kvadrat (dvs om $\sqrt{x^2 - N}$ är ett heltal), låt $p = x + \sqrt{x^2 - N}$ och $q = x - \sqrt{x^2 - N}$ och gå till 6.*
4. *Om $x - \sqrt{x^2 - N} < 2$, låt $p = N$ och $q = 1$ och gå till 6.*
5. *Addera 1 till x och gå till 2.*
6. *Klart!*

Om faktoriseringen blir $p = N$ och $q = 1$ (såsom det kan i steg 4. ovan) så är talet N ett primtal.

Definition 8
Eulers ϕ-funktion, $\phi(n)$, är antalet positiva heltal $< n$ som är relativt prima med n.

Sats 11 Eulers sats
Om a och n är relativt prima så är $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Sats 12 Eulers produktregel
$\phi(n) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i-1}(p_i - 1)$ *där* $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ *är primtalsfaktoriseringen av* n.

Sats 13 Summeringsregler

$$\sum_{k=1}^{n} a\, b_k \;=\; a \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \;+\; \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a \;=\; (n-m+1)a \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \;-\; \sum_{k=1}^{m-1} a_k$$

Sats 14 Speciella regler

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k \;=\; \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad \textit{om } a \neq 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \;=\; a_n - a_0$$

Definition 9
En funktion kallas **inversen** *till funktionen f och betecknas f^{-1} om $f^{-1}(f(x)) = x$ för alla x som f är definierad för.*

Sats 15 Deriveringsregler
Om f och g är funktioner av variabeln x och a en konstant så gäller

1. $\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(af) = a\frac{df}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(a) = 0$
4. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ *om* $n \neq 0$
5. $\frac{d}{dx}(f \cdot g) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(e^f) = \frac{df}{dx} \cdot e^f$
7. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
8. *Kedjeregeln:* $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{dg}{dx}(x) \cdot \frac{df}{dx}(g(x))$

Sats 16 *Om f är en deriverbar funktion så gäller att*
$\frac{df}{dx}(x) < 0$ *om och endast om f är avtagande genom x,*
$\frac{df}{dx}(x) > 0$ *om och endast om f är växande genom x.*

Sats 17 Binomialkoefficienter
Antalet sätt att välja k element bland n möjliga (utan återläggning och utan hänsyn till ordningen) är

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{där} \quad n! = \prod_{j=1}^{n} j$$

Sats 18 Binomialsatsen
För alla reella tal a och b och positiva heltal n är

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Matematisk statistik

Definition 10 Sannolikhet
Sannolikheten *för en händelse A är ett tal, betecknat $P(A)$, som uppfyller villkoren:*
1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Om A, B disjunkta, så är $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sats 19 Komplementsatsen
$P(A^C) = 1 - P(A)$

Sats 20 Additionssatsen
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Defintion 12 Betingad sannolikhet
Den **betingade sannolikheten** *av A givet B är* $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *där* $P(B) > 0$.

Definition 13
En **slumpvariabel**, *X, är en (vanligtvis numerisk) generalisering av ett experiment. Mha slumpvariabeln kan olika händelser formuleras som att X har vissa värden. En slumpvariabels* **utfallsrum**, *Ω_X, är mängden av de värden som slumpvariabeln kan anta.*

Definition 14
A och B är **oberoende** *händelser om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*
Två slumpvariabler, X och Y med utfallsrum Ω_X resp. Ω_Y, är **oberoende** *om $P(X \in M_X, Y \in M_Y) = P(X \in M_X)P(Y \in M_Y)$ för alla $M_X \subseteq \Omega_X$ och $M_Y \subseteq \Omega_Y$.*

Sats 21 Binomialfördelning
Om $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ där $P(Y_k = 1) = p$ och $P(Y_k = 0) = 1 - p$ för alla $k = 1, 2, \ldots n$ och variablerna $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ är oberoende av varandra, så är $\boldsymbol{X \in Bin(n, p)}$ *(dvs X är* **binomialfördelad** *med n och p) vilket innebär att dess sannolikhetsfunktion är $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ där $k \in \{0, 1, \ldots, n\} = \Omega_X$, $E(X) = np$ och $V(X) = np(1-p)$.*

Sats 22 Poissonfördelning
Om X är Poissonfördelad med intensitet λ betecknas detta $X \in Poi(\lambda)$ och innebär att $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ där $x \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \Omega_X$, $E(X) = \lambda$ och $V(X) = \lambda$. Dessutom gäller att $X \in Poi(\lambda_X) \perp Y \in Poi(\lambda_Y) \Rightarrow X + Y \in Poi(\lambda_X + \lambda_Y)$.

Sats 23 Normalfördelning
Denna betecknas $N(\mu, \sigma^2)$ där μ är väntevärde och σ^2 är varians. Om $X \in N(0, 1)$ kallas X **standard normalfördelad***, och dess fördelningsfunktion är $\Phi(x) = P(X \le x)$ för alla $x \in \mathbb{R} = \Omega_X$. Om $X \in N(\mu, \sigma^2)$ så är $P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ för alla $x \in \mathbb{R} = \Omega_X$.*
Symmetri*: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.*
Sannolikheter*: $P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ för all $a < b \in \mathbb{R}$.*

Definition 15 Väntevärdet *av en slumpvariabel X betecknas $E(X)$ och är tyngdpunkten i sannolikhetsfunktionen respektive täthetsfunktionen för x. Linjaritet: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.* **Variansen** *av en slumpvariablel X betecknas $V(X)$ och definieras $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Räkneregel: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. För diskreta variabler X är $E(g(X)) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x) P(X = x)$.*

Sats 24 Centrala Gränsvärdessatsen (CGS)
Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende och lika fördelade med $E(X_i) = \mu$ och $V(X_i) = \sigma^2$ så är approximativt $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \in N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ och $\sum_{i=1}^n X_i \in N(n\mu, n\sigma^2)$ då n är stort.

Definition 16 Beskrivande statistik

Proportion*: $p = \widehat{P(X \in A)} = \dfrac{\#\{i : x_i \in A\}}{n}$*

Medelvärde*: $\bar{x} = \hat{\mu} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$*

Stickprovsvarians*: $s^2 = \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2 \right)$*

Stickprovskorrelation*: $R = \hat{\rho} = \dfrac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{\sqrt{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2\right)\left(n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2\right)}}$*

Definition 17 Konfidensintervall
Antag $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är stickprov på X och $E(X) = \mu_X$, att $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ är stickprov på Y och $E(Y) = \mu_Y$ och att $V(X) = V(Y) = \sigma^2$. Då gäller att ett $100(1-\alpha)\%$ **konfidensintervall** *för*

$$\mu_X \text{ är } \begin{cases} \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{om } \sigma^2 \text{ är känd} \\ \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} & \text{om } \sigma^2 \text{ är okänd} \end{cases}$$

$$\mu_X - \mu_Y \text{ är } \begin{cases} \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2,\,(n+m-2)} s_P \\ \text{där } s_P^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2} (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) \text{ om } \min(n, m) \le 30 \\ \text{och } s_P^2 = \frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} \text{ om } \min(n, m) > 30 \end{cases}$$

Definition 18 HYPOTESTEST

Antag $x_1, \dots, x_n$ *är ett stickprov på* X *fördelad med parametern* θ *respektive* $x_1, \dots, x_{n_1}$ *och* $y_1, \dots, y_{n_2}$ *på* X *och* Y *fördelade med parametern* θ*. För att testa*

$$\begin{cases} H_0: \ \theta = \theta_0 & \textit{(nollhypotesen)} \\ H_1: \ \theta \in \Theta & \textit{(alternativhypotesen)} \end{cases}$$

används teststatistikan $U = U(X_1, \dots, X_n)$ *och beslutsregeln* A_α *som svarar mot* Θ *enligt fördelningen av* F_U *under* H_0 *vid signifikansnivån* α*.*

$$\textit{Testregeln är} \begin{cases} \textit{Förkasta } H_0 \textit{ om } A_\alpha \\ \textit{Förkasta inte } H_0 \textit{ om inte } A_\alpha \end{cases}$$

θ	H_0	H_1	u	A_α
π	$\pi = \pi_0$	$\pi < \pi_0$	$\dfrac{\sqrt{n}(p - \pi_0)}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}$	$u < -\lambda_\alpha$
		$\pi > \pi_0$		$u > \lambda_\alpha$
		$\pi \neq \pi_0$	*då* $n\pi_0(1-\pi_0) > 5$	$\lvert u \rvert > \lambda_{\alpha/2}$
π_1, π_2	$\pi_1 = \pi_2$	$\pi_1 < \pi_2$	$\dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$	$u < -\lambda_\alpha$
		$\pi_1 > \pi_2$		$u > \lambda_\alpha$
		$\pi_1 \neq \pi_2$	*då* $n_1\pi_1(1-\pi_1) > 5$ *och* $n_2\pi_2(1-\pi_2)$	$\lvert u \rvert > \lambda_{\alpha/2}$
μ (σ^2 *känd*)	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$u < -\lambda_\alpha$
		$\mu > \mu_0$		$u > \lambda_\alpha$
		$\mu \neq \mu_0$		$\lvert u \rvert > \lambda_{\alpha/2}$
μ (σ^2 *okänd*)	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$u < -t_\alpha(n-1)$
		$\mu > \mu_0$		$u > t_\alpha(n-1)$
		$\mu \neq \mu_0$		$\lvert u \rvert > t_{\alpha/2}(n-1)$
μ_1, μ_2	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$	$u < -t_{\alpha,\,(n_1+n_2-2)}$
		$\mu_1 > \mu_2$		$u > t_{\alpha,\,(n_1+n_2-2)}$
		$\mu_1 \neq \mu_2$	*då* $\sigma_1 = \sigma_2$ *men okända, och* $\min(n_1, n_2) \leq 30$	$\lvert u \rvert > t_{\alpha/2,\,(n_1+n_2-2)}$
μ_1, μ_2	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$u < -t_{\alpha,\,(n_1+n_2-2)}$
		$\mu_1 > \mu_2$		$u > t_{\alpha,\,(n_1+n_2-2)}$
		$\mu_1 \neq \mu_2$	*då* $\sigma_1 = \sigma_2$ *men okända, och* $\min(n_1, n_2) > 30$	$\lvert u \rvert > t_{\alpha/2,(n_1+n_2-2)}$
A, B	$A \perp B$	$A \not\perp B$	$\dfrac{(n_{11}c_2 - n_{12}c_1)\sqrt{n}}{\sqrt{c_1c_2r_1r_2}}$	$\lvert u \rvert > \lambda_{\alpha/2}$
F_X	$F_X = F_0$	$F_X \neq F_0$	$\sum_{k=1}^{K} \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k}$ *där* $e_k = NP(X \in I_k)$	$u > \chi^2_\alpha(K-1)$

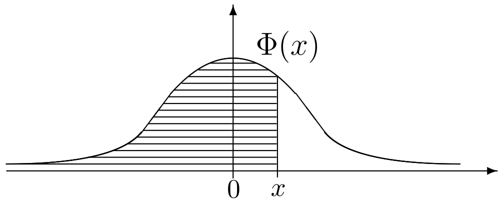
Enkel linjär regression I en linjär modell, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$, som beskriver hur responsen Y beror av kovariaten X med residualen ϵ, baserad på det parade stickprovet (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ skattas interceptet β_0 och regressionskoefficienten β_1 enligt

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad \text{och} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

med förklaringsgraden (determinationskoefficienten)

$$R^2 = \frac{\left(n\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)\right)^2}{\left(n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2\right)}$$

Normalfördelningsvärden



Tabell över värden på $\Phi(x) = P(X \leq x)$ där
$X \in N(0,1)$. För $x < 0$ utnyttja relationen $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

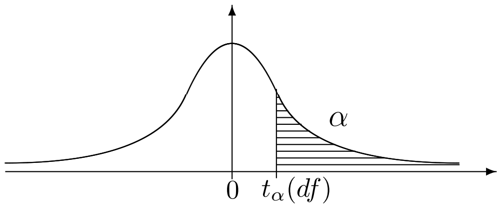
x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

x	+0.0	+0.1	+0.2	+0.3	+0.4	+0.5	+0.6	+0.7	+0.8	+0.9
3	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Normal-percentiler:
Några värden på λ_α sådana att $P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0,1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.1	1.281552	0.005	2.575829
0.05	1.644854	0.001	3.090232
0.025	1.959964	0.0005	3.290527
0.01	2.326348	0.0001	3.719016

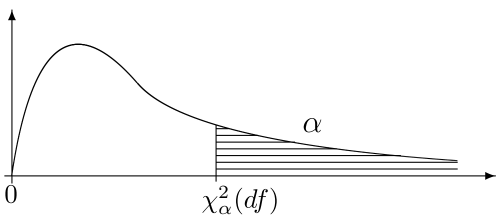
t-percentiler



Tabell över värden på $t_\alpha(df)$.

df \ α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	15.8945	31.8205	63.6567	318.3088
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	4.8487	6.9646	9.9248	22.3271
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	3.4819	4.5407	5.8409	10.2145
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	2.9986	3.7470	4.6041	7.1732
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	2.7565	3.3649	4.0322	5.8934
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	2.6122	3.1427	3.7074	5.2076
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.5168	2.9980	3.4995	4.7853
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.4490	2.8965	3.3554	4.5008
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.3984	2.8214	3.2498	4.2968
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.3593	2.7638	3.1693	4.1437
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.3027	2.6810	3.0545	3.9296
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.2638	2.6245	2.9768	3.7874
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.2238	2.5669	2.8982	3.6458
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.1967	2.5280	2.8453	3.5518
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.1666	2.4851	2.7874	3.4502
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.1470	2.4573	2.7500	3.3852
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.1087	2.4033	2.6778	3.2614
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.0809	2.3642	2.6259	3.1737

χ^2-percentiler



Tabell över värden på $\chi^2_\alpha(df)$.

df \ α	0.999	0.995	0.99	0.95	0.05	0.01	0.005	0.001
1	0.0000	0.0000	0.0002	0.0039	3.8415	6.6349	7.8794	10.8276
2	0.0020	0.0100	0.0201	0.1026	5.9915	9.2103	10.5966	13.8155
3	0.0243	0.0717	0.1148	0.3518	7.8147	11.3449	12.8382	16.2662
4	0.0908	0.2070	0.2971	0.7107	9.4877	13.2767	14.8603	18.4668
5	0.2102	0.4117	0.5543	1.1455	11.0705	15.0863	16.7496	20.5150
6	0.3811	0.6757	0.8721	1.6354	12.5916	16.8119	18.5476	22.4577
7	0.5985	0.9893	1.2390	2.1673	14.0671	18.4753	20.2777	24.3219
8	0.8571	1.3444	1.6465	2.7326	15.5073	20.0902	21.9550	26.1245
9	1.1519	1.7349	2.0879	3.3251	16.9190	21.6660	23.5894	27.8772
10	1.4787	2.1559	2.5582	3.9403	18.3070	23.2093	25.1882	29.5883
12	2.2142	3.0738	3.5706	5.2260	21.0261	26.2170	28.2995	32.9095
14	3.0407	4.0747	4.6604	6.5706	23.6848	29.1412	31.3193	36.1233
17	4.4161	5.6972	6.4078	8.6718	27.5871	33.4087	35.7185	40.7902
20	5.9210	7.4338	8.2604	10.8508	31.4104	37.5662	39.9968	45.3147
25	8.6493	10.5197	11.5240	14.6114	37.6525	44.3141	46.9279	52.6197
30	11.5880	13.7867	14.9535	18.4927	43.7730	50.8922	53.6720	59.7031
50	24.6739	27.9907	29.7067	34.7643	67.5048	76.1539	79.4900	86.6608
100	61.9179	67.3276	70.0649	77.9295	124.342	135.807	140.169	149.449