3. Överföringskvalitet

a) Antag att felsannolikheten per paket är 1 ‰. Hur många paket kan skickas innan sannolikheten att minst 1 paket är fel blir > 10 %?

---

b) Antag att ett krypto blir alltför svårknäckbart om mer än 5 % av tecknen är fel. Hur stor teckenfelsannolikhet kan man acceptera om 60 tecken ska skickas om sannolikheten för <5 % ska vara större än 80 %?

---

c) Hur stor blir den totala förväntade andelen fel i ett meddelande som innehåller 1000 tecken om teckenfelsannolikheten är 2 %?

Hur stor blir approximativt (dvs ungefär) sannolikheten att mindre än 3 % av meddelandet är fel?

Lösningar

a) Varje paket är fel med sannolikhet 1 ‰, dvs $P(A_i) = 0.001$ där A_i är händelsen {paket nr i är fel}

Antag att vi skickar n paket. Då är {minst 1 paket är fel} = {alla paket är rätt}^{c} =

= {paket 1 rätt <u>och</u> paket 2 rätt <u>och</u> ... <u>och</u> paket n rätt}^{c}

= {{paket 1 rätt} $\cap$ {paket 2 rätt} $\cap$ ... $\cap$ {paket n rätt}}^{c}

$$= \{A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c\}^c$$

Därmed är

P(minst 1 paket är fel) =

$$= P\left(\{A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c\}^c\right)$$

$$= 1 - P\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c\right)$$

(Om händelserna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oberoende)

$$= 1 - P(A_1^c)\,P(A_2^c) \cdots P(A_n^c)$$

$$= 1 - \left(1 - P(A_1)\right)\left(1 - P(A_2)\right) \cdots \left(1 - P(A_n)\right)$$

$$= 1 - \underbrace{\underbrace{(1 - 0.001)}_{0.999}\underbrace{(1 - 0.001)}_{0.999} \cdots \underbrace{(1 - 0.001)}_{0.999}}_{n \text{ gånger}}$$

$$= 1 - 0.999^n > 0.1$$

$$0.999^n < 0.9 \qquad \left(n < \frac{\ln 0.9}{\ln 0.999}\right)$$

105 paket kan skickas.

b) P(knäckbart krypto) =

= P(andel fel $\leq$ 5%)

= P(0, 1, 2 eller 3 tecken fel)

= P(0 fel) + P(1 fel) + P(2 fel) +

+ P(3 fel)

$$\text{Antalet fel} = \sum_{k=1}^{20} X_k$$

där $X_k = \begin{cases} 0 & \text{om tecken } k \text{ rätt} \\ 1 & \text{om tecken } k \text{ fel} \end{cases}$

[oberoende]

och $P(X_k = 1) = p$ $\quad (P(X_k = 0) = 1 - p)$

Då är Antalet fel = Y binomial-fördelat med n och p, dvs

$Y \in Bin(n, p)$ vilket innebär

att $P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$

där $\binom{n}{y} = \dfrac{n!}{y!(n-y)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{y\cdot(y-1)\cdots 1}$

(antalet sätt att välja
y st bland n möjliga.)

Nu är $P(0 \text{ fel}) = P(Y=0) =$

$= \binom{20}{0} p^0 (1-p)^{20-0} = (1-p)^{20}$

$P(1 \text{ fel}) = P(Y=1) =$

$= \binom{20}{1} p^1 (1-p)^{20-1} = 20\,p(1-p)^{19}$

$P(2 \text{ fel}) = P(Y=2) =$

$= \binom{20}{2} p^2 (1-p)^{20-2} = \dfrac{20\cdot 19}{2\cdot 1} p^2 (1-p)^{18} =$

$= 190\,p^2(1-p)^{18}$

$P(3 \text{ fel}) = P(Y=3)$

$= \binom{20}{3} p^3 (1-p)^{20-3} = \dfrac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1} p^3 (1-p)^{17} =$

$= 1140\,p^3(1-p)^{17}$

Vi ska nu välja p så att

$$P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3) > 0.8$$

dvs

$$(1-p)^{20}+20p(1-p)^{19}+190p^2(1-p)^{18}+1140p^3(1-p)^{17} > 0.8$$

$$\{\text{datorprogram}\} \Rightarrow p < 0.459956$$

c) Totala andelen fel är

$$A = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} X_k$$

där $X_k = \begin{cases} 0 & \text{om tecken } k \text{ är rätt} \\ 1 & \text{om tecken } k \text{ är fel} \end{cases}$

och $P(X_k = 1) = 0.02$ $\left(P(X_k=0) = 0.98 \right)$

Därmed är $B \in Bin(1000, 0.02)$
där $A = \frac{1}{1000} B$
Vill nu beräkna $E(A) = \frac{1}{1000} E(B) =$

$$= \frac{1}{1000} \sum_{j=0}^{1000} j \, P(B = j)$$

Allmänt gäller dock att

om $B \in Bin(n, p)$ så är

$E(B) = np$ och $V(B) = np(1-p)$
I detta fall är alltså

$E(B) = 1000 \cdot 0.02 = 20$ och

därmed $E(A) = \frac{20}{1000} = 0.02$.

För att beräkna sannolikheten att mindre än 5% är fel måste vi dock beräkna

$$P(A \leq 3\%) = P\left(\frac{1}{1000}B < 0.03\right)$$

$$= P(B < 30) = \sum_{j=0}^{50} P(B = j)$$

Detta blir dock väldigt mödosamt...

Emellertid gäller approximativt om $np(1-p) > 10$, så är

$$B \in N(np, np(1-p))$$

I detta fall är $np(1-p) = 1000 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 19.6$

så $P(B<30) \approx \Phi\left(\frac{30-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$

$$= \Phi\left(\frac{30-20}{\sqrt{19.6}}\right) = \Phi(2.26) = 0.9881$$

(Värdet 0.9881 kan man slå upp i en tabell över normalfördelningsvärden.)