Tentamen i Tillämpad Matematik och statistik för IT-forensik. Del 2: Statistik

7.5 hp

2015 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg 3, 18p: betyg 4, 24p: betyg 5.
Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare samt formelsamling som medföljer tentamenstexten.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://dixon.hh.se/erja/teach` → `Matematik och statistik för IT-forensik.`

1. Antag att man observerar

$$1.3 \qquad 2.9 \qquad 1.4 \qquad 0.8$$

av variabeln X.

(a) Beräkna stickprovsstandardavvikelsen av X. (3p)

Parat med observationerna av X observeras

$$11 \qquad -14 \qquad 7 \qquad 15$$

av variabeln Y.

(b) Härled en linjär modell enligt minsta kvadratmetoden med X som förklarande variabel och Y som responsvariabel. (3p)

2. Då Ernst campar brukar han grilla över öppen eld. Om det är blött i marken är det svårare att få fyr på brasan. Låt $A = \{\text{Ernst lyckas tända brasan inom 5 min.}\}$ och $B = \{\text{det är blött i marken}\}$. Då är $P(A|B) = 0.07$, $P(A) = 0.27$ och $P(B) = 0.41$. Beräkna

(a) $P(A \cup B)$. (3p)

(b) $P(B|A)$. (3p)

3. Till ett postkontor kommer paket för att vidare distribueras i distriktet. Antag att paket nr i avrundat till heltal väger X_i kg där $X_i \in Poi(2)$ oberoende från paket till paket. När den sammanlagda vikten överstiger 1 ton åker en lastbil iväg för att distribuera dessa (och de paket som kommer efter får distribueras av en annan lastbil). Antag att det kommer 523 paket till postkontoret. Vad är approximativt sannolikheten att det kommer behövas mer än en lastbild för att distribuera de 573 paketen. (4p)

4. Låt $X \in N(2\,900,\, 2\,090)$ och beräkna $P(2X + 1\,000 \leq 6\,600)$. (3p)

5. Vid ett hotell i en skidort i Alperna går verksamheten nätt och jämnt runt. För att få ett statligt bidrag behöver man kunna visa att det förväntade antalet gäster per säsong är fler än 250.

   (a) Antag att man vet att $V(X) = 1\,764$ där antalet besökare under ett år. Hur många observationer måste man ha i stickprovet för att ett 99% konfidensintervall för det förväntade antalet gäster ska bli 100 gäster brett? (3p)

   (b) Från tidigare år har man observerat att $\sum_{i=1}^{10} x_i = 2\,710$ och $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 739\,000$ där x_i är antalet gäster år i. Kan man på 5% signifikansnivå bevisa att det förväntade antalet gäster är större än 250 per år? (3p)

6. Under 20 veckor observeras antalet besökare av en hemsida per vecka:

   37, 15, 39, 16, 28, 37, 59, 12, 33, 57, 11, 25, 37, 11, 31, 12, 53, 43, 56

   (a) Bilda ett histogram för dessa data med klasserna

   $$[11, 21) \qquad [21, 32) \qquad [31, 41) \qquad [41, 51) \qquad [51, 61)$$ (2p)

   (b) Gör ett hypotestest på 5% signifikansnivå av om antalet besökare per vecka är ojämnt fördelat (dvs ej likformigt fördelat). (3p)

LYCKA TILL!

Matematik

Definition 1 MÄNGDBETECKNINGAR

$\varnothing$ *Tomma mängden*	Ω *Hela utfallsrummet*
$\cup$ *Unionen*	$\cap$ *Snittet*
^{C} *Komplementet*	$\|A\|$ *Antalet element i* A

Sats 1 ADDITIONSSATSEN
För alla mängder A *och* B *gäller att* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Sats 2 DE MORGANS LAGAR
För alla mängder A *och* B *gäller att* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ *och* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Sats 3 EXPONENTLAGARNA
$a^{b+c} = a^b a^c$, $a^{bc} = (a^b)^c = (a^c)^b$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *och* $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

Sats 4 LOGARITMLAGARNA
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(b^c) = c \log_a b$, $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$ *och*
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

Sats 5 KVADRERINGSREGLERNA
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *och* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Sats 6 ANDRAGRADSEKVATIONER
Om $x^2 + px + q = 0$ *så är* $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Sats 7 FAKTORSATSEN
Varje polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x_n$ *av grad* n *har* n *nollställen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *och kan faktoriseras mha dessa enligt* $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

Sats 8 SAMBANDET MELLAN KOEFFICIENTER OCH RATIONELLA RÖTTER
Om ekvationen

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \;=\; 0$$

har en rationell rot $x = p/q$ *så måste* a_0 *vara mulitpel av* p *och* a_n *vara mulitipel av* q.

Algoritm 1 DIVISIONSALGORITMEN
För alla heltal a *och* $b \neq 0$ *finns det heltal* k *och* r *sådana att* $0 \leq r \leq |b| - 1$ *och*

$$\frac{a}{b} \;=\; k + \frac{r}{b}$$

där talet k *kallas* **kvot** *och talet* r *kallas* **(principal) rest**.

Definition 2
Ett **primtal** *är ett heltal som inte är jämnt delbart med något annat heltal andra än 1 och sig självt.*

Algoritm 2 ERATOSTHENES SÅLL

Antag att man vill generera alla primtal $\leq n$.

1. *Gör en lista över alla heltal fr o m 2 t o m* n.
2. *Ringa in det första icke strukna eller inringade talet.*
3. *Stryk alla multipler av det senast inringade talet från resten av listan.*
4. *Om inte alla tal* $\leq \sqrt{n}$ *är inringade eller strukna, gå tillbaks till steg 2.*
5. *Då alla tal som är* $\leq \sqrt{n}$ *behandlats är de icke strukna talen primtalen.*

Definition 3
Den **största gemensamma delaren**, $\gcd(a, b)$, *för två heltal,* a *och* b, *är produkten av alla primtalsfaktorer som är gemensamma i* a *och* b.

Definition 4
Heltalen a *och* b *kallas* **relativt prima** *om* $\gcd(a, b) = 1$.

Definition 5
Låt a *och* b *vara heltal. Det minsta tal,* c, *sådant att* $a = bc$ *eller* $b = ac$ *kallas* **minsta gemensamma multipel** *för* a *och* b *och betecknas* $\operatorname{lcm}(a, b)$.

Sats 9 $\operatorname{lcm}(a, b) \;=\; \dfrac{ab}{\gcd(a, b)}$ *för alla heltal* a *och* b.

Algoritm 3 Euklides algoritm

För att bestämma $\gcd(a,b)$*, där* $a > b$*, bestäm* $r_1, r_2, r_3, \ldots$ *så att*

$$\begin{cases} a &= c_1 b + r_1 & \text{där } 0 \le r_1 \le |b| - 1 \\ b &= c_2 r_1 + r_2 & \text{där } 0 \le r_2 \le r_1 - 1 \end{cases}$$

och fortsättningsvis

$$\begin{cases} r_1 &= c_3 r_2 + r_3 & \text{där } 0 \le r_3 \le r_2 - 1 \\ r_2 &= c_4 r_3 + r_4 & \text{där } 0 \le r_4 \le r_3 - 1 \\ \vdots & \vdots & \\ r_{n-2} &= c_n r_{n-1} + r_n & \text{där } 0 \le r_n \le r_{n-1} - 1 \\ r_{n-1} &= c_n r_n + 0 & (\text{där alltså } r_{n+1} = 0) \end{cases}$$

Den första resten r_i *som är* $= 0$ *(dvs* r_{n+1} *i förklaringen ovan) kallas den* **första försvinnande** *resten, den senaste resten innan den (*r_n *i förklaringen ovan) kallas den* **sista icke-försvinnande** *resten. Och det är den sista icke-försvinnande resten som är* $\gcd(a,b)$.

Sats 10 Summeringsregler

$$\sum_{k=1}^{n} a\, b_k \;=\; a \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \;+\; \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a \;=\; (n-m+1)a \qquad\qquad \sum_{k=m}^{n} a_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k$$

Sats 11 Aritmetisk summa

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$$

Sats 12 Geometrisk summa

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \;=\; \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \qquad \textit{för alla } a \neq 1$$

Sats 13 Teleskopsumma

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \;=\; a_n - a_0$$

Definition 6
En funktion f är **injektiv** *om det för alla $x_1 \neq x_2$ gäller att $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definition 7
En funktion kallas **inversen** *till funktionen f och betecknas f^{-1} om $f^{-1}(f(x)) = x$ för alla x som f är definierad för.*

Sats 14
En funktion har invers om och endast om funktionen är injektiv.

Sats 15 DERIVERINGSREGLER
Om f och g är funktioner av variabeln x och a en konstant så gäller

1. $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(af) = a\frac{df}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(a) = 0$
4. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ *om* $n \neq 0$
5. $\frac{d}{dx}(f \cdot g) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(e^f) = \frac{df}{dx} \cdot e^f$
7. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
8. *Kedjeregeln:* $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{dg}{dx}(x) \cdot \frac{df}{dx}(g(x))$

Sats 16 *Om f är en deriverbar funktion så gäller att*
$\frac{df}{dx}(x) < 0$ *om och endast om f är avtagande genom x,*
$\frac{df}{dx}(x) > 0$ *om och endast om f är växande genom x.*

Sats 17 BINOMIALKOEFFICIENTER
Antalet sätt att välja k element bland n möjliga (utan återläggning och utan hänsyn till ordningen) är

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{där} \quad n! = \prod_{j=1}^{n} j$$

Sats 18 BINOMIALSATSEN
För alla reella tal a och b och positiva heltal n är

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Matematisk statistik

Definition 8 Sannolikhet
Om ett experiment har m möjliga utfall varav g är gynnsamma för händelsen A, så är **sannolikheten** *för A vilket betecknas $P(A) = g/m$.*

Sats 19 Komplementsatsen
$P(A^C) = 1 - P(A)$

Sats 20 Additionssatsen
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definition 9
En **slumpvariabel**, *X, är en (vanligtvis numerisk) generalisering av ett experiment. Mha slumpvariabeln kan olika händelser formuleras som att X har vissa värden. En slumpvariabels* **utfallsrum**, *Ω_X, är mängden av de värden som slumpvariabeln kan anta.*

Definition 10
A och B är **oberoende** *händelser om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*
Två slumpvariabler, X och Y med utfallsrum Ω_X resp. Ω_Y, är **oberoende** *om $P(X \in M_X, Y \in M_Y) = P(X \in M_X)P(Y \in M_Y)$ för alla $M_X \subseteq \Omega_X$ och $M_Y \subseteq \Omega_Y$.*

Sats 21 Binomialfördelning
Om $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ där $P(Y_k = 1) = p$ och $P(Y_k = 0) = 1-p$ för alla $k = 1, 2, \ldots n$ och variablerna $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ är oberoende av varandra, så är $\boldsymbol{X \in Bin(n, p)}$ (dvs X är **binomialfördelad** *med n och p) vilket innebär att dess sannolikhetsfunktion är $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ där $k \in \{0, 1, \ldots, n\} = \Omega_X$, $E(X) = np$ och $V(X) = np(1-p)$.*

Sats 22 Poissonfördelning
Om X är Poissonfördelad med intensitet λ betecknas detta $X \in Poi(\lambda)$ och innebär att $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ där $x \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \Omega_X$, $E(X) = \lambda$ och $V(X) = \lambda$. Dessutom gäller att $X \in Poi(\lambda_X) \perp Y \in Poi(\lambda_Y) \Rightarrow X + Y \in Poi(\lambda_X + \lambda_Y)$.

Sats 23 Normalfördelning
Denna betecknas $N(\mu, \sigma^2)$ där μ är väntevärde och σ^2 är varians. Om $X \in N(0, 1)$ kallas X **standard normalfördelad**, *och dess fördelningsfunktion är $\Phi(x) = P(X \leq x)$ för alla $x \in \mathbb{R} = \Omega_X$. Om $X \in N(\mu, \sigma^2)$ så är $P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ för alla $x \in \mathbb{R} = \Omega_X$.*
Symmetri*: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.*
Sannolikheter*: $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ för all $a < b \in \mathbb{R}$.*

Definition 11 Väntevärdet *av en slumpvariabel X betecknas $E(X)$ och är tyngdpunkten i sannolikhetsfunktionen respektive täthetsfunktionen för x. Linjaritet: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.* **Variansen** *av en slumpvariablel X betecknas $V(X)$ och definieras $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Räkneregel: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. För diskreta variabler X är $E(g(X)) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)P(X = x)$.*

Sats 24 CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN (CGS)
Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende och lika fördelade med $E(X_i) = \mu$ och $V(X_i) = \sigma^2$ så är approximativt $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \in N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ och $\sum_{i=1}^{n} X_i \in N(n\mu, n\sigma^2)$ då n är stort.

Definition 12 BESKRIVANDE STATISTIK

Medelvärde: $\bar{x} \;=\; \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$

Stickprovsvarians: $s^2 \;=\; \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \;=\; \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \;-\; n\,\bar{x}^2\right)$

Stickprovskorrelation: $R = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$

Definition 13 KONFIDENSINTERVALL
Antag $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende och normalfördelade $N(\mu, \sigma^2)$. Då gäller att ett $100(1-\alpha)\%$ **konfidensintervall** *för*

$$\mu \text{ är } \begin{cases} \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{om } \sigma^2 \text{ är känd} \\ \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} & \text{om } \sigma^2 \text{ är okänd} \end{cases}$$

Definition 14 HYPOTESTEST
Antag $X_1, \ldots, X_n$ är ett stickprov på $X \in N(\mu, \sigma^2)$. För att testa hypotesen

$$\begin{cases} H_0 & : \ \mu = \mu_0 \\ H_1 & : \ \mu \in M_\mu \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} H_0 & : \ \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 & : \ \sigma^2 \in M_\sigma \end{cases}$$

används teststatistikan U vid signifikansnivån α. Testregeln är

$$\begin{cases} \text{Förkasta } H_0 \text{ om } A_\alpha \\ \text{Förkasta inte } H_0 \text{ om inte } A_\alpha \end{cases}$$

θ	H_0	H_1	u	A_α
μ (σ^2 känd)	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$u < -\lambda_\alpha$
		$\mu > \mu_0$		$u > \lambda_\alpha$
		$\mu \neq \mu_0$		$\{\lvert u\rvert > \lambda_{\alpha/2}\}$
μ (σ^2 okänd)	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$u < -t_\alpha(n-1)$
		$\mu > \mu_0$		$u > t_\alpha(n-1)$
		$\mu \neq \mu_0$		$\{\lvert u\rvert > t_{\alpha/2}(n-1)\}$
F_X	$F_X = F_0$	$F_X \neq F_0$	$\sum_{k=1}^{K}\frac{(o_k-e_k)^2}{e_k}$ där $e_k = NP(X \in I_k)$	$u > \chi_\alpha^2(K-1)$

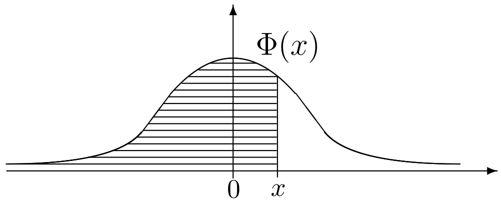
Enkel linjär regression En linjär modell, $Y = aX + b$, som beskriver sambandet mellan slumpvariablerna X och Y baserad på det parade stickprovet $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ är med

$$\hat{a} \;=\; \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \quad \text{och} \quad \hat{b} \;=\; \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$$

med förklaringsgraden

$$R^2 \;=\; \frac{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)\right)^2}{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2\right)}$$

Normalfördelningsvärden



Tabell över värden på $\Phi(x) = P(X \leq x)$ där $X \in N(0,1)$. För $x < 0$ utnyttja relationen $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

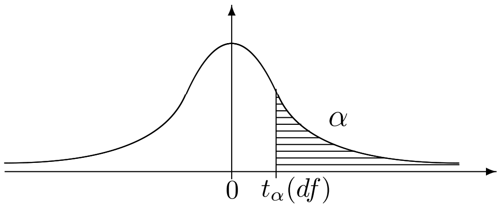
x	+0.0	+0.1	+0.2	+0.3	+0.4	+0.5	+0.6	+0.7	+0.8	+0.9
3	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Normal-percentiler:

Några värden på λ_α sådana att $P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0,1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.1	1.281552	0.005	2.575829
0.05	1.644854	0.001	3.090232
0.025	1.959964	0.0005	3.290527
0.01	2.326348	0.0001	3.719016

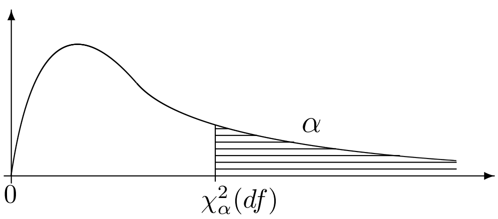
t-percentiler



Tabell över värden på $t_\alpha(df)$.

df \ α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	15.8945	31.8205	63.6567	318.3088
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	4.8487	6.9646	9.9248	22.3271
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	3.4819	4.5407	5.8409	10.2145
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	2.9986	3.7470	4.6041	7.1732
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	2.7565	3.3649	4.0322	5.8934
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	2.6122	3.1427	3.7074	5.2076
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.5168	2.9980	3.4995	4.7853
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.4490	2.8965	3.3554	4.5008
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.3984	2.8214	3.2498	4.2968
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.3593	2.7638	3.1693	4.1437
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.3027	2.6810	3.0545	3.9296
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.2638	2.6245	2.9768	3.7874
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.2238	2.5669	2.8982	3.6458
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.1967	2.5280	2.8453	3.5518
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.1666	2.4851	2.7874	3.4502
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.1470	2.4573	2.7500	3.3852
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.1087	2.4033	2.6778	3.2614
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.0809	2.3642	2.6259	3.1737

χ^2-percentiler



Tabell över värden på $\chi^2_\alpha(df)$.

df \ α	0.999	0.995	0.99	0.95	0.05	0.01	0.005	0.001
1	0.0000	0.0000	0.0002	0.0039	3.8415	6.6349	7.8794	10.8276
2	0.0020	0.0100	0.0201	0.1026	5.9915	9.2103	10.5966	13.8155
3	0.0243	0.0717	0.1148	0.3518	7.8147	11.3449	12.8382	16.2662
4	0.0908	0.2070	0.2971	0.7107	9.4877	13.2767	14.8603	18.4668
5	0.2102	0.4117	0.5543	1.1455	11.0705	15.0863	16.7496	20.5150
6	0.3811	0.6757	0.8721	1.6354	12.5916	16.8119	18.5476	22.4577
7	0.5985	0.9893	1.2390	2.1673	14.0671	18.4753	20.2777	24.3219
8	0.8571	1.3444	1.6465	2.7326	15.5073	20.0902	21.9550	26.1245
9	1.1519	1.7349	2.0879	3.3251	16.9190	21.6660	23.5894	27.8772
10	1.4787	2.1559	2.5582	3.9403	18.3070	23.2093	25.1882	29.5883
12	2.2142	3.0738	3.5706	5.2260	21.0261	26.2170	28.2995	32.9095
14	3.0407	4.0747	4.6604	6.5706	23.6848	29.1412	31.3193	36.1233
17	4.4161	5.6972	6.4078	8.6718	27.5871	33.4087	35.7185	40.7902
20	5.9210	7.4338	8.2604	10.8508	31.4104	37.5662	39.9968	45.3147
25	8.6493	10.5197	11.5240	14.6114	37.6525	44.3141	46.9279	52.6197
30	11.5880	13.7867	14.9535	18.4927	43.7730	50.8922	53.6720	59.7031
50	24.6739	27.9907	29.7067	34.7643	67.5048	76.1539	79.4900	86.6608
100	61.9179	67.3276	70.0649	77.9295	124.342	135.807	140.169	149.449