Georgi Tchilikov version 2007-08-27

(Ett projekt som aldrig tar slut ...)

(Klassisk / elementär) GEOMETRI

En övningssamling tänkt att försöka lotsa dig på en aktiv upptäcktsfärd genom geometrin.
Har vuxit fram som påbyggnad till [Häggmark] och [Tengstrand] (se litteraturförteckningen).
Tänkt att användas i matematiklärarutbildningen vid Högskolan i Halmstad.

- Punktmarkerade så här står definitioner, kommentarer och utredningar samt tips för vidare läsning.

0. Numrerade så här står frågor / problem att fundera över.
   (Lösningar till de flesta återfinns i ett separat häfte, men,
   som med annat här i livet, är det väl roligare att göra det själv än att titta på när andra gör det.)

   Ibland utelämnar jag (för korthetens skull) "Visa att" –
   står det bara ett påstående framkastat, så är det underförstått att det skall motiveras / bevisas.

www-länkar av intresse försöker jag samla på http://www.hh.se/staff/getc/Geometri

---

INNEHÅLL

Varför geometri och vilken geometri? 3
Mål: 4
Litteratur 4
Examination 4

LITET HISTORIA 5

De gamla grekernas betydelse 6
Abstraktionen 7
Den experimentella metodens begränsningar . . 7
Den axiomatiska (deduktiva) metoden 7

Euklides Elementa 8
Retorisk matematik 8
Innehållet i Elementa (smakprov) 9
Geometri kontra algebra 10
Postulat 11
Axiom 12
Konstruktioner med passare och linjal 13
Definitioner och grundbegrepp 14
Logiska brister i Elementa 15
Parallellpostulatet (det femte) 16
Vilka påståenden får tas som axiom? 17

Geometri i skolan 18
På Newtons tid 18
Den nya matematiken (1960-talet) 19
Hur gångbar är Euklides idag? 20
Matematik – en naturvetenskap? 21

VINKLAR 22
Våra axiom 22
Vinkelsumman i en triangel 24
Sfäriska trianglar 29

TRIANGLAR 32

KONGRUENS 32
Basvinkelsatsen 34
Mittpunktsnormaler och bisektriser 35
Omvändningen till en sats 36
Kongruensfallen: övningar 37
Problem 38

LIKFORMIGHET 42
De tre likformighetsfallen 42
Area 48
Area och likformighet 50
Likformighet: blandade problem 52
Delningsförhållanden 59
Menelaos sats 61

Cevas sats 62

TRIANGLAR & CIRKLAR **63**
PYTHAGORAS SATS 63
Speciella trianglar 71
Bisektrissatsen 76
Areabetraktelser 79
Niopunktscirkeln 82
Niopunktscirkeln 83
Morleys sats 85
CIRKLAR : tangenter 89
Omkrets, area och π 93

Bågvinkelsatsen **94**

Kordasatsen **104**
Potenslinje 107

Inskrivna/omskrivna cirklar **108**
Eulers linje 119
Herons formel 120

Thales sats. Bågvinkelsatsen **127**
Om-/inskrivna cirklar till fyrhörningar 128
En generalisering av bågvinkelsatsen 129
Bisektrissatsen och den harmoniska cirkeln . . 130
Cevas sats 130
Trianglar 130
Problem 134

Harmoniska cirklar **140**
Harmoniska punktpar och ortogonala cirklar . . 143
Polar 144
Separation 144

Varför geometri och vilken geometri?

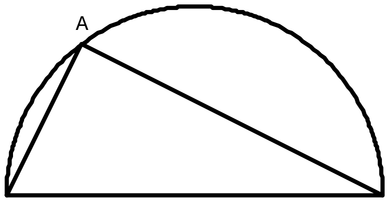
I skolsammanhang förknippas ordet geometri numera nästan uteslutande med area- och volymberäkningar. Möjligen också med trigonometri och analytisk geometri (= geometri m.h.a. ett koordinatsystem).

Det var litet annorlunda förr!

I alla fall för dem som gick gymnasium, blev geometri synonymt med *bevis* (t.ex. Pythagoras sats, men inte bara den!). I aritmetik och algebra satte man räknefärdigheterna främst, geometrin däremot skulle tjäna som

övningsfält för logiskt tänkande (bevisföring)

Att man därvid (okritiskt) lät en skrift från ca 300 f.Kr.[1] prägla verksamheten i skolan ända in på 1950-talet ställde naturligtvis till bekymmer. Den s.k. "nya matematiken" på 1960-talet svepte all euklidisk geometri bort från västerlandets skolkurser. Därvid kastade man dock ut även "barnet med badvattnet", för om man nu vill betona resonemang och argumentation i skolmatematiken (vilket man väl ändå vill?), är det då inte mera tilltalande att göra det kring en geometrisk fråga som
"Hur kan det komma sig att vinkeln A verkar bli rät, oavsett var på halvcirkeln punkten A ligger?"



jämfört med t.ex. "Varför är $(-1)\,(-1) = 1$ "?

I geometrin kan icke-triviala matematiska resonemang förenas med åskådlighet och konkretion.

En annan viktig aspekt på geometri är som

övningsfält för problemlösning

... a teacher who has had no personal experience of some sort of creative work can scarcely expect to be able to inspire, to lead, to help, or even to recognize the creative activity of his students.

The average teacher cannot be expected to do research on some very advanced subject. Yet the solution of a non-routine mathematical problem is genuine creative work.

...

A great discovery solves a great problem but there is a grain of discovery in the solution of any problem.

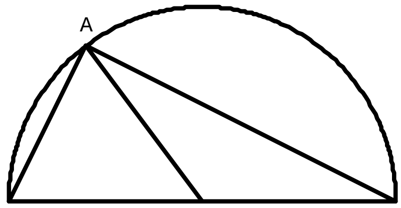
Your problem may be modest; but if it challenges your curiosity and brings into play your inventive faculties, and if you solve it by your own means, you may experience the tension and enjoy the triumph of discovery. Such experiences at a susceptible age may create a taste for mental work and leave their imprint on mind and character for a lifetime.

Thus, a teacher of mathematics has a great opportunity. If he fills his allotted time with drilling his students in routine operations, he kills their interest, hampers their intellectual development, and misuses his opportunity. But if he challenges the curiosity of his students by setting them problems proportionate to their knowledge, and helps them to solve their problems with stimulating questions, he may give them a taste for, and some means of, independent thinking.

G.Pólya[2]

Geometrin är rik på problem, som är
(med Tengstrands ord) *enkla att formulera och förstå, men som det behövs både tålamod och fantasi för att lösa.*

Ett stort steg närmare en förklaring av
räta vinkeln-fenomenet i spalten till vänster
kommer man t.ex. om man drar radien från A :



Det krävs ett visst mått av fantasi[3]
att utvidga en figur på detta sätt!

[1] *Geometrins elementa* (d.v.s. grunder) av den gammalgrekiske matematikern Euklides, som vi numera kallar *Euklides Elementa*. Lär vara alla tiders bästsäljare nr.2 efter Bibeln:
drygt 2000 upplagor under årens lopp.

[2] G.Pólya (1887-1985), ungrare, professor i Zürich och Stanford, med några satser uppkallade efter sig, intresserade sig för problemlösning och lärarutbildning och blev på äldre dar minst lika känd på det området.

[3] Modeordet *kreativitet* passar också bra här :-)

Mål:

- Att ge insikt om geometrins centrala betydelse inom matematik och naturvetenskap.
- Att påvisa den elementära geometrins lämplighet för att hos eleven
  - väcka nyfikenhet och intresse för matematik i allmänhet,
  - uppmuntra till ett undersökande arbetssätt,
  - stimulera kreativitet,
  - skärpa den analytiska och logiska förmågan,
  - träna ihärdighet vid problemlösning,
  - öva redovisning av tankegångar.
- Att förmedla en bit av mänsklighetens kulturarv och vetenskapens idéhistoria.

Innehåll:

- Kongruens och likformighet. (Translation, spegling, vridning.)
- Klassiska resultat om trianglar, cirklar och kägelsnitt.
- Konstruktioner med passare och linjal. De tre olösbara konstruktionsproblemen.
- Något om projektiv geometri.
- Orientering om icke-euklidisk geometri.

Undervisning:

Föreläsningar, frågetimmar samt "seminarieövningar", där deltagarna presenterar lösningsförslag inför gruppen.

Ytterligare ett exempel på "klassisk geometri":
För en godtycklig triangel ABC, låt

H_A, H_B, H_C	$=$	höjdernas fotpunkter
M_A, M_B, M_C	$=$	sidornas mittpunkter
K_A, K_B, K_C	$=$	mittpunkterna på sträckorna från ett hörn till höjdernas skärningspunkt H

(H_A, M_A, K_A är de som "hör till" hörn A_1, etc.)

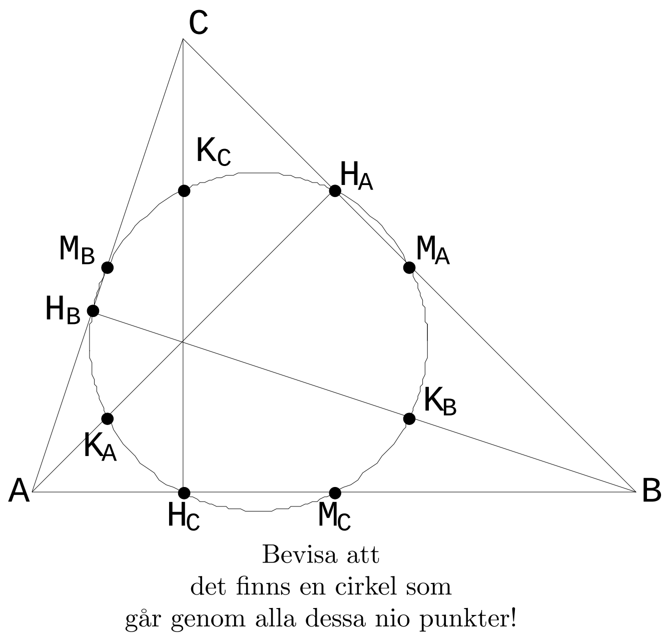
Litteratur

- Material utlagt på http://www.hh.se/staff/getc/Geometri
- (ev. Anders Tengstrand, *Åtta kapitel om geometri,* Studentlitteratur, 2005)

Examination

- Aktivt deltagande i problemlösningsseminarierna.
- ("Portfolioexamination":)
  Stencilerna har övningar/problem utan facit.
  (Tengstrand har inte facit heller.)
  Ditt arbete under kursens gång skall resultera i en pärm med (läsbara!) lösningar till (ett urval av) dessa!
  Pärmarna samlas in och granskas i slutet av kursen.
- Muntlig tentamen på bevis av grundläggande satser (sådana som gås igenom på föreläsningar / finns utskrivna i kurslitteraturen).

Det finns ett skäl att avvika från den traditionella tentamensformen i just denna kurs: För att få in mer problemlösning. Ett problem kan ju sägas vara en fråga, som man vid första påseende "inte har en aning" om hur man ska gå tillväga med, och då är det klart att en 4-timmars salsskrivningar inte kan innehålla mycket av den varan.)



Bevisa att det finns en cirkel som går genom alla dessa nio punkter!

LITET HISTORIA

Två olika slag av *historia* är intressanta att ta upp i samband med geometriämnet :

i) matematikvetenskapens historia
ii) skolmatematikens historia

Det vore naturligtvis fel att hävda att matematiken skulle börjat med de gamla grekerena.

Även om det var vad många i Europa trodde ända fram till 1800-talet,
för man visste väldigt litet om de förgrekiska civilisationerna.

Mycket av vår kunskap om det gamla Egypten har vi, paradoxalt nog,
Napoleons fälttåg till Egypten år 1798 att tacka för!
Napoleon hade nämligen med sig en noggrant utvald skara av 167 vetenskapsmän,
däribland två av Frankrikes främsta matematiker, Gaspard Monge och Jean-Baptiste Fourier[4],
med uppgift att ta reda på "allt" som var värt att veta om Egypten.
Britterna lät dessa slutföra sitt arbete med resultatet att
"Never before or since has an account of a foreign land been made
so completely, so accurately, so rapidly, and under such difficult conditions."[5]

De egyptiska hieroglyferna dechiffrerades 1822 av fransmannen Champollion (1790-1832),
som påstås ha sett dem hos Fourier som 11-åring och redan då föresatt sig att knäcka gåtan.
(Faktum lär i alla fall vara att Champollion kunde tre österländska språk redan vid 13
och anställdes som universitetslärare vid 17 års ålder.)

Babyloniernas kilskrift dechiffrerades efter en heroisk insats av
engelsmannen Henry Rawlinson under 1830- och 1840-talen.

(Att Homeros Troja inte var en ren fiktion,
blev man riktigt övertygad först efter Heinrich Schliemanns utgrävningar på 1870-talet.)

- Pythagoras sats, t.ex., var tydligen bekant i Mesopotamien tusentalet år tidigare.
- I egyptiska papyrusrullar har man hittat en tillämpning av formeln $V = \frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right) h$
för volymen av en s.k. stympad pyramid med kvadratisk botten; se sid. 58.
(Än så länge har vi ingen övertygande hypotes om hur egyptsierna skulle kommit fram till den.)

Ändå finns det starka skäl att framhäva just grekernas roll (och ta till klyschan *Redan ge gamla grekerna ...*).

---

[4] Båda räknas faktiskt som "fäder" till hela grenar av matematiken:
Monge (1746-1818) till *differentialgeometri* och *deskriptiv geometri*, Fourier (1768—1830) – till *Fourieranalys*.

[5] Citatet och övriga uppgifter i detta stycke är från David M. Burton, *The History of Mathematics*, 4th ed., 1999.

De gamla grekernas betydelse för matematikens utveckling

Alla bevarade matematiska skrifter från Mesopotamien och Egypten kan sägas vara exempelsamlingar. De formulerar konkreta problem med siffror och löser dem med recept. Ingenstans förklaras någonting. Exakta och approximativa formler blandas utan urskiljning.

> T.ex. Rhindpapyrusen, från ca 2000 f.Kr. anvisar var och en som vill veta arean av en triangel som mäter 10 längdenheter ”på ena sidan” och 4 längdenheter ”på basen”, att multiplicera 10 med 4 och dividera resultatet med 2. Om dåtidens läsare verkligen tolkade *sida* som *höjd*, eller om de, felaktigt, använde produkten av två triangelsidor som mått på arean även då vinkeln mellan dem inte var rät – det är historikerna idag inte klara över.[6]
>
> För ett annat exempel på en felaktig formel som tycks ha varit i omlopp, se problem **??** på sid.**??**.

Mer eller mindre korrekta recept av det här slaget följde man i ytterligare 1500 år (och ännu längre i de civilisationer, som inte kom i kontakt med den grekiska, t.ex. den hinduiska) innan grekerna utvecklade ett logiskt system som gjorde det möjligt att, utifrån ganska allmänna antaganden, bevisa att arean av en triangel alltid måste vara lika med halva produkten av höjd och bas.

Det var grekernas innovationer –

abstraktion och
bevis med **deduktion** (den **axiomatiska metoden**),

som gav matematiken den karaktär den har än idag.
Speciellt idén att bygga upp en teori axiomatiskt ”saknar motstycke i såväl tid som rum”[7] – civilisationer utan kontakt med den grekiska (som Kina och Japan) utvecklade den *inte*, även om man fick längre tid på sig.

[6] J.L.Heilbron, *Geometry Civilized*, Oxford, 1998
[7] Roger Cooke, *The History of Mathematics. A Brief Course*, Wiley, 1997

Abstraktionen

För egyptierna var linjer = spända snören, punkter = pålar instuckna i marken, etc.
Grekerna anlade ett mera abstrakt perspektiv:
de fysiska föremålen som (ofullkomliga) avbilder av vissa *idéer* – ”ideala” punkter, linjer, etc.

De andra folken *löste problem* – grekerna *bevisade teorem.*
Babylonierna räknade ut $\sqrt{2}$ med en för alla praktiska tillämpningar mer än tillräcklig noggrannhet –
grekerna bevisade att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal.

Den experimentella metodens begränsningar

Betrakta som exempel ”mätbeviset” för att vinkelsumman i en triangel är 180 :
vi mäter de tre vinklarna med gradskiva och adderar.

Vad har vi bevisat, egentligen? Vi har tittat på en triangel enbart.
OK, vi kan titta på några fler. Tre, fyra? Hur många behöver vi granska?

Vi tycker att vi väljer dem helt slumpmässigt, men är vi säkra på att de vi väljer ändå inte råkar tillhöra någon äkta delmängd av trianglar med en speciell egenskap, som gör att vinkelsumman blir 180 ?

Är vinkelsumman verkligen 180 ?

En avvikelse på, säg, 10 ° skulle vi visst märka – men en skillnad på 1 ° ? 0.1 ° ? 0.01 ° ?

Vinkelsumman är 180 ° ”inom ramen av den noggrannhet
som vår syn och vår förmåga att handskas med gradskivan tillåter”, skulle vi nog behöva påpeka.
Fast är det inte litet mystiskt att de flesta, som märker någon avvikelse från 180°,
skulle skylla detta just på slarv i mätningen, snarare än att ta det som ett tecken på att satsen är falsk?
Det antyder att vi i vårt huvud bär på en idé om en ”ideal” triangel,
som verklighetens trianglar endast är approximationer utav?![8]
(Den filosofiskt allmänbildade tänker här på Platon och mycket riktigt:
När man diskuterar olika syn på matematikens natur, brukar *platonism* nämnas i första rummet.)

Den axiomatiska (deduktiva) metoden

Hur skaffar man sig då kunskap om idéernas värld?

Genom att systematiskt resonera sig fram utifrån premisser som inte kan ifrågasättas.
Starta från konstateranden som ingen kan förneka samt utnyttja tänkandets (logikens) lagar.

Det man *accepterar utan bevis*, kallas **axiom** eller **postulat** (grundantaganden, grundsatser),
det man logiskt bevisar utifrån axiomen kallas **satser** / **teorem** / **propositioner**,
och själva den logiska härledningsprocessen benämns **deduktion**.

Idén med den axiomatiska (deduktiva) metoden är:
Om du tror på axiomen (och logikens lagar), så måste du också tro på deras konsekvenser, teoremen.
Teorin uppfyller högt ställda krav på objektivitet –
slutsatserna som dras blir desamma vem som än gör dem, förutsatt att man inte gör något logiskt fel.

T.ex. berättas om filosofen Thomas Hobbes (1588-1679) följande:
Första gången han råkar slå upp Euklides bok Elementa (som 40-åring) och får syn på Pythagoras sats,
så utbrister han spontant. ”I helvete heller – det kan inte vara sant!”.
Men under satsens formulering följer ett bevis. Där hänvisas till något tidigare i boken.
Hobbes läser även det och hänvisas vidare till en ännu tidigare sats.
Så ytterligare ett par steg tillbaka och Hobbes blir övertygad!
Sedan den dagen är han obotligt förälskad i Elementa.

Den axiomatiska metoden blev ett mönster att efterlikna även för en del filosofer, icke-matematiker.
Ett exempel är Spinoza (1632-1677), vars huvudverk, *Ethica*, bär undertiteln *Ordine Geometrico Demonstrata*,
d.v.s. ”demonstrerat i geometrisk ordning”.

[8] Detta exempel, historien om Hobbes nedan och en del andra idéer i detta avsnitt är hämtade från
John Roe, *Elementary Geometry*, Oxford University Press, 1993

Euklides Elementa

Den skrift som kommit att ”förkroppsliga” den axiomatiska metoden (och matematik i allmänhet) är *Geometrins elementa*[9] av Euklides, kort kallad *Euklides Elementa*.

> Det enda böckerna har att förtälja oss om Euklides är att
> han verkade i Alexandria omkring 300 f.Kr.[10], samt
> två anekdoter, som egentligen handlar om matematiklärarens urgamla bekymmer:
>
> Anekdot 1: Kung Ptolemaios skulle få privatundervisning, men blev tydligen något avskräckt, när han tittade i Elementa, så han frågade om det inte fanns något kortare/lättare alternativ. ” *Nej, det finns ingen ’kungsväg’ i geometrin.*”, svarade Euklides.
>
> Anekdot 2: Någon annan rik yngling, som tog lektioner av Euklides och tyckte att det var svårt, undrade vad allt det där skulle tjäna till. Euklides beordrade då sin betjänt att ge ynglingen några mynt, ”när nu denne nödvändigtvis måste tjäna tjäna pengar på det han lär sig”.

Det är mycket möjligt att Elementa inte var den allra första skriften av sitt slag,
men den måste ha varit överlägsen sina föregångare/medtävlare och ”trängt ut dem från marknaden”.
Lär vara västerlandets näst mest tryckta bok, efter Bibeln: ca 2000 upplagor under årens lopp.
Bildade människor förväntades vara förtrogna
med Euklides Elementa nästan som med Bibeln:

> *Alone at nights,*
> *I read my Bible more and Euclid less.*
> (Robert Buchanan (1841-1901), eng. förf.[11])

Finns (med kommentarer) på http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
Man får dock ha förståelse för att en översättning av en 2000 år gammal text kan klinga underligt!

Retorisk matematik kontra algebraisk symbolism – en jämförelse

Det är inte så lätt med algebra, tycker många elever.
"Varje ekvation halverar försäljningsvolymen", anser bokförläggare.
Tillmötesgående lärare/författare försöker då minimera antalet formler.
Men hur lätt är det att läsa och begripa retorisk matematik, d.v.s. matematisk text med ord enbart?
Användningen av symboler inom matematiken slog igenom först i början på 1600-talet.
Euklides och hans samtida uttryckte sig helt och hållet med ord. Hur såg det ut?
Häromdagen råkade jag på en hänvisning till Euklides på Internet:

> ... so that $(a+2b)/b = b/a$. Without loss of generality $(a,b)=1$ and then also $(a+2b,b)=1$ and the conclusion (Euclid VII.20) is that $a+2b=b$ and $b=a$ ....

Här handlar det om heltal och (a,b) står för den största gemensamma delaren av a och b,
men hur lyder sats 20 i Euklides bok VII? Vi slår upp:

> Prop. VII.20.
> The least numbers of those which have the same ratio with them measure those which have the same ratio with them the same number of times; the greater the greater; and the less the less.

Nå, hur lätt är nu *detta* att förstå ?

[9] elementa = grunder
[10] ”före Arkimedes och efter Eudoxos”, enl. Proklos från 400-talet *efter* Kr.
[11] Citerat i H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley, 1969

Innehållet i Elementa (smakprov)

Består av 13 ”böcker”, varvid ”bok” lämpligen tolkas som ”kapitel” snarare än ”band”.

Startar med 23 definitioner, 5 postulat och 5 axiom
(Euklides indelade sina grundantaganden i två kategorier och använde termerna axiom och postulat i något olika betydelse än man gör nuförtiden, då de betraktas som helt likvärdiga synonymer) och utifrån dessa bevisas sedan inte mindre än 465 satser.

(Med t.ex. V.20 avses sats 20 i den femte boken.)

Bok I Väsentligen skolgeometri.
Kulminerar i Pythagoras sats och dess omvändning (I.47-48)

Bok II

Bok III Cirklar: bågvinkelsatsen (III.21),
kordasatsen och omvändningen till dess ”tangentfall” (III.35-37)

Bok IV Om inskrivna/omskrivna cirklar och regelbundna månghörningar:
Hur man givet en cirkel, inskriver i den en regelbunden månghörning (IV.11),
givet en cirkel, omskriver runt den en regelbunden femhörning (IV.12),
givet en regelbunden femhörning, inskriver/omskriver en cirkel (IV.13-14)
konstruerar en regelbunden 15-hörning (IV.16)

Bok V

Bok VI

Bok VII Talteori:
delbarhet, begreppet *relativt prima*, minsta gemensamma multipel och största gemensamma delare

Bok VIII Talteori

Bok IX Talteori.
Beviset (som alla läroböcker upprepar än idag) för att det finns oändligt många primtal (IX.20)
En metod för att generera perfekta tal (IX.36)

Bok X Euklides algoritm för största gemensamma delare

Bok XI Rymdgeometri: grundläggande begrepp.

Bok XII Rymdgeometri: konens volym m.m.

Bok XIII Konstruktion av regelbundna polyedrar.
Avslutas med ett informellt bevis för att det finns endast 5 sådana:
tetraeder, kub, oktaeder, dodekaeder och ikosaeder.

Som synes, innehåller Elementa inte bara geometri,
men även det vi skulle betecknat som algebra/talteori (böcker VII-X) formulerades på geometriskt språk.
Det är å andra sidan inte heller sant att Euklides skulle haft ambitionen att täcka allt dåtidens vetande.
Som titeln säger är det ändå fråga om ”grunder”.
Kägelsnitt, som Euklides själv skrev en avhandling om, omnämns t.ex. inte alls.[12]

[12] Roger Cooke, *The History of Mathematics. A Brief Course*, Wiley, 1997

Geometri kontra algebra

Hur kom det sig att grekerna satte geometrin före algebran?

Pythagoréerna på 500-talet f.Kr. var faktiskt talteoretiker i första hand.
Deras huvudidé var att allt i världen kunde uttryckas i heltal eller förhållanden mellan heltal.
Det var de som införde begreppet primtal (som fortsätter att sysselsätta matematiker än idag) och förmodligen var det de som kom på det vi idag kallar Euklides algoritm.

Men någon gång under 400-talet f.Kr. (?) uppdagades det att heltalen inte räckte till:
förhållandet mellan diagonalens längd och sidans längd i en kvadrat kan *inte* uttryckas med heltal.

Grekerna talade här om **kommensurabla** resp. **inkommensurabla** sträckor.
Om sträckorna AB och CD var sådana att det gick att finna en (tillräckligt kort) sträcka PQ, sådan att

$$\text{längdförhållandena } \frac{AB}{PQ} \text{ och } \frac{CD}{PQ} \text{ båda är heltal, vilket ju är } \Longleftrightarrow \frac{AB}{CD} = \text{heltal}$$

så kallades AB och CD kommensurabla – de kunde "mätas med samma måttstock".

Pythagoréerna tog alltså i början för självklart att alla par av sträckor skulle vara kommensurabla.
Upptäckten att de tagit fel kan ha varit mycket betydelsefull för bevismatematikens framväxt,
för den pekar på behovet av bevis – här fick man ett fall där den mänskliga intuitionen inte räckte till!

Grekerna lyckades aldrig konstruera en algebraisk teori för irrationella tal –
sådana kom först 1860-1870 (Dedekind, Cantor; se appendix i [Vretblad]).
Kanske därför började algebran ses som underlägsen geometrin och
av ett "ordentligt" bevis började man kräva att det skulle formuleras geometriskt.
När Newton t.ex. skulle skriva "för publik" (Principia, 1687),
formulerade han sig på ett mycket mer geometriskt språk, än när han skrev för sig själv.

Mot slutet av 1800-talet svängde pendeln åt andra hållet.
Inte bara fick man en logiskt tillfredsställande teori för reella tal,
man stötte också på flera fall då vår geometriska intuition tycktes ta fel
och geometriska resonemang började betraktas med misstro.

Postulat

kallades de antaganden, som var specifika för geometrin:

Postulat 1. Det går att dra en rät linje från en punkt till en annan.

Av fortsättningen framgår dock att Euklides egentligen menar även att linjen är entydigt bestämd – att det *inte* går att dra flera olika linjer genom samma två punkter, så vi korrigerar till:

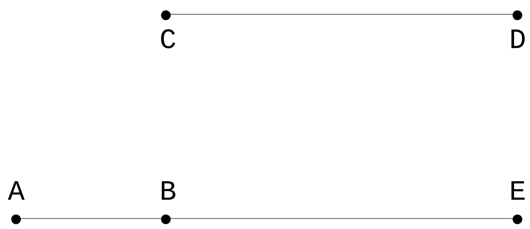
Postulat 1, modern version :
Givet två olika punkter, så finns det en och endast en rät linje som går genom båda.

Postulat 2. Det går att obegränsat fortsätta en begränsad rät linje.

Det här kommer sig av att grekerna inte hade begreppet ”oändlig linje” överhuvudtaget – ”rät linje” betydde för dem alltid en ändligt lång rät sträcka.
En modern version, som svarar mot dagens krav på precision i uttryckssättet, lyder:

Postulat 2, modern version :

Givet två räta linjesträckor, AB och CD,
finns det en och endast en punkt E, sådan att
B ligger på sträckan AE och
BE är lika lång som (kongruent med) CD.



Postulat 3. Det går att rita en cirkel med godtycklig medelpunkt och radie.

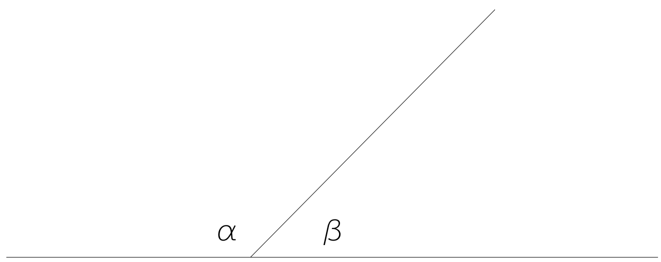
Euklides använder detta postulat i följande preciserade betydelse:

Postulat 3, modern version :
Givet två olika punkter, O och A, så finns det en cirkel med medelpunkt i O och radie OA.

Postulat 4. Alla räta vinklar är varandra lika.

För att uppskatta detta skall man ha klart för sig Euklides definition av rät vinkel:

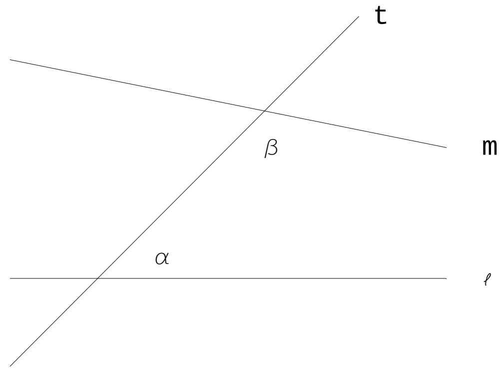
Def. 10. Om två räta linjer råkas som i figuren, och vinklarna α och β blir lika stora (kongruenta), så säger vi att de är räta.



Om två andra linjer, någon annanstans i planet,
på liknande sätt ger upphov till två sinsemellan lika vinklar, γ och δ,
så kan man faktiskt *inte* med logik enbart dra slutsatsen att *alla* fyra vinklarna skulle vara lika:
$\alpha = \beta$ och $\gamma = \delta$ medför *inte* att $\alpha = \gamma$.

Postulat 5. ("parallellpostulatet"; Euklides version) :

Om en rät linje, t, skär två räta linjer, ℓ och m,
så att de inre vinklarna på samma sida, α och β,
tillsammans är mindre än två räta vinklar,
så möts de två räta linjerna, om de dras ut oändligt,
på den sida på vilken vinklarna är mindre än två räta vinklar.



Ett, som det visar sig, ekvivalent påstående är

Postulat 5, populäraste versionen (kallas ibland Playfairs[13] version)
Givet en rät linje ℓ och en punkt P, som inte ligger på ℓ,
så finns det *högst en* linje genom P som är parallell med (d.v.s. inte skär) ℓ.

Att det verkligen finns *minst en* parallell linje,
följer ur de andra postulaten och det kunde Euklides själv bevisa (sats I.28).
Mer om detta postulat på sid. 16.

Axiom

var de "allmänna sanningarna" som antogs gälla inom alla områden.
De tre första ser vi idag oftast i deras algebraiska formulering, som jag också ger:

Axiom 1. De som är lika med ett och samma är också lika med varandra: $a = c$ och $b = c \Longrightarrow a = b$

Axiom 2. Om lika läggs till lika, blir summorna lika: $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$

Axiom 3. Om lika dras från lika, blir resterna lika: $a = b \Longrightarrow a - c = b - c$

Axiom 4. Storheter som sammanfaller med varandra är lika varandra.

Axiom 5. Det hela är större än delen. (Här avses nog längd, area och volym.)

[13] John Playfair (1748-1819), skotte som 1795 redigerade en (som lärobok framgångsrik) utgåva av Euklides Elementa. Påpekade själv att formuleringen ovan inte alls var hans eget påfund, utan fanns redan hos Proklos, 400 e.Kr.

Konstruktioner med passare och (ograderad) linjal

Många satser i Elementa är egentligen lösningar till *konstruktionsuppgifter* :
de visar hur man med hjälp av enbart passare och ograderad linjal
kan rita upp (**konstruera**) figurer med vissa egenskaper.
Ex. Givet en cirkel, konstruera en regelbunden femhörning med alla de fem hörnen på cirkeln.

- *Med passare och (ograderad) linjal* betyder att man skall hålla sig till följande regler:

  Man antas starta med ett antal punkter givna.
  Med två givna punkter får man göra två saker:

  1. Dra en linje genom punkterna. *(Jfr Postulat 1)*
  2. Rita en cirkel med den ena punkten som medelpunkt och som går genom den andra punkten. *(Jfr Postulat 3)*

  De skärningspunkter som fås med sådan linje- och cirkeldragning
  får sedan utnyttjas som "givna punkter" i nästa steg.
  Konstruktionen skall vara klar efter *ändligt många steg* av typ 1 eller 2 ovan.

- [Häggmark, sid.61] nämner två något olika formuleringar i stället för 2:

  2'. "Att med en given punkt som medelpunkt upprita en cirkel med given radie."
  2". "Att taga hvad punkt man vil til medelpunkt,
  och rita en cirkel, hvars peripherie går genom hvad punkt man vil."

  Är dessa likvärdiga?

  Nja, den naturliga tolkningen av "upprita en cirkel med given radie" är väl att
  man kan "ta upp" avståndet mellan två givna punkter med passaren
  och sedan rita en cirkel någon annanstans i planet,
  medan 2" ovan säger att cirkeln skall gå "där de givna punkterna ligger" (ekvivalent med 2 ovan).
  (En passare som "slår ihop" sina ben så fort man lyft den från pappret, skulle klara av 2, men inte 2'.)

- Redan sats I.2 i Euklides lyder emellertid:

  Givet en sträcka och en linje ℓ med en utvald punkt P,
  går det att avsätta en sträcka på ℓ som har P som ändpunkt och är lika lång som den givna.

  Denna sats (tillsammans med 2 ovan) innebär att man med en följd av operationer av typ 1 och 2
  kan åstadkomma samma effekt som en 2'-operation – det är bara omständligare att inte få använda sig av 2'.
  Därför accepterar vi 2' (förtydligad nedan) i stället för 2 i fortsättningen!

  2'. Givet två punkter, A och B, och en tredje punkt C,
  så går det att konstruera en cirkel genom C med radie lika lång som AB.

- Överhuvudtaget gäller det att hänvisa till konstruktioner som man redan bevisat vara möjliga
  (bl.a. de som Häggmark går igenom i sina exempel – se kopior), om ens beskrivningar ska bli överskådliga:

  När vi väl vet t.ex. att genom en given punkt går att dra en normal till en given linje,
  så säger vi bara "vi drar en normal ...", och låter bli att gå in på detaljer!

- Med "konstruera" i uppgiftstexter menar man i första hand
  "*berätta* hur man med passare och (ograderad) linjal *skulle kunna* konstruera ...
  och förklara varför den beskrivna proceduren ger önskat resultat" – själva ritandet är av andrahandsbetydelse.

- Figurer, som inte kunde konstrueras med passare och linjal, tycktes inte existera för grekerna!
  T.ex. kände man ingen metod för att konstruera en regelbunden 7-hörning – senare bevisades att någon sådan
  procedur inte existerar – och mycket riktigt: Elementa har ingen sats som handlar om regelbundna 7-hörningar!

  Idag delar vi inte detta extrema synsätt, utan har andra skäl att diskutera konstruktioner – se sid. 21.

Definitioner och grundbegrepp

När man bygger upp en teori (och bedriver vetenskap överhuvudtaget),
måste man naturligtvis definiera sina begrepp – man vill ju undvika varje form av missförstånd.
Mer komplicerade begrepp definieras utifrån ”enklare” begrepp,
på samma sätt som komplicerade satser bevisas utifrån enklare, tidigare bevisade.
Mycket riktigt hade Euklides också ett antal definitioner i sin framställning – några smakprov:

Def. 1. En **punkt** är det som inte har någon del.

Def. 2. En **linje** är längd utan bredd.

Def. 10. Definition av **rät vinkel**, se diskussionen om Postulat 4 på sid.11.

Def. 11. En **trubbig vinkel** kalls en vinkel som är större än en rät vinkel.

Def. 23. **Parallella linjer** kallas räta linjer som aldrig skär varandra, oavsett hur mycket de förlängs.

Vi märker dock att definitionerna i början ger ett något underligt intryck.
Blir man verkligen klok på vad ”det som inte har någon del” är,
om man inte redan har en viss uppfattning om begreppet punkt?

Då man bevisar att något måste gälla, måste man alltid utgå från något annat, som man redan vet.

Då man definierar ett begrepp, måste detta ske genom hänvisningar till redan kända begrepp.
Förr eller senare måste man emellertid stanna vid några ”enklaste” begrepp.
På samma sätt som en beviskedja måste sluta i några axiom – antaganden som accepteras utan bevis –
måste en definitionskedja sluta i några **grundbegrepp**, som man inte försöker förklara ytterligare.

Hur kan detta fungera?

Jo, vi behöver faktiskt inte bry oss om vad begrepp som punkt, linje, plan, etc. är skulle vara för någonting, ”egentligen”– det enda vi skall utnyttja är deras *egenskaper* och *relationerna dem emellan*, så som de framgår av axiom och postulat: Linjer och punkter är objekt, sådana att linjer kan innehålla punkter och till varje par av olika punkter finns exakt en linje som innehåller båda, etc. Matematikern David Hilbert (1862-1943) ställde det här på sin spets genom att påpeka att vi egentligen skall kunna byta ut orden ”punkt”, linje” och ”plan”, mot, säg, ”stol”, ”bord” och ”ölglas” – logiken skall inte lida av det!

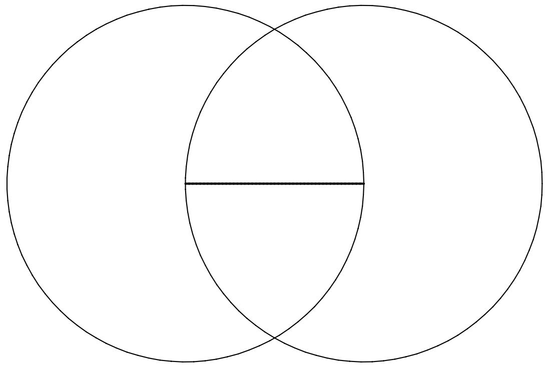
Att man avstår från att binda en teoris begrepp till bestämda verklighetsobjekt, reducerar ingalunda matematiken till fåfängt prat, utan tvärtom gör den mera användbar: närhelst objekt påträffas, som satisfierar de relationer vilka hävdas i axiomen, kan hela teorin övertas och tillämpas på dessa objekt.

Logiska brister i Elementa

Att Euklides felaktigt ger sken av att alla begrepp kan definieras,
är inte den enda anmärkningen man kan ha mot Elementa.

Under 1800-talet blev det allt klarare att Euklides axiomsystem var ofullständigt – på flera ställen i sina bevis stödjer han sig på förhållanden, som *inte* kan utläsas ur axiomen. Redan det allra första beviset ger ett exempel:

Där figurerar en sträcka AB och två cirklar.
Den ena cirkeln har sin medelpunkt i A och går genom B,
den andra har sin medelpunkt i B och går genom A.



I det läget utnyttjar Euklides att det finns en punkt där cirklarna skär varandra.
Visst, de skär varandra i två olika punkter rentav – ingen betvivlar detta –
men skärningspunkternas existens kan inte logiskt härledas ur de 10 axiomen/postulaten,
och då bryter vi mot andemeningen med den axiomatiska metoden – att undersöka
hur långt man kan komma enbart med logisk slutledning utifrån några explicit formulerade antaganden.
På så sätt hoppas vi bl.a. få bättre insikt i hur saker och ting hänger ihop.
Figurer är oumbärliga – de ger idéer och hjälper oss att inte tappa den röda tråden i argumentationen –
men för att vi ska hålla kontroll över vilka antaganden som våra slutsatser bygger,
skall de inte ska utgöra länkar i våra resonemang, annat än indirekt via explicit formulerade axiom.
Om vi skulle säga något i stil med att cirklarna ”uppenbarligen måste skära varandra”
eller att ”var och en kan pröva själv och se att de gör det”, sysslar vi inte längre med matematik,
utan bedriver snarare en empirisk studie av en grafisk framställning (där axiomen faktiskt inte håller).

Det räcker helt enkelt inte med 10 axiom/postulat – man får lägga ett par tiotal till.
År 1899 utgav David Hilbert en slags moderniserad version av Elementa, *Grundlagen der Geometrie*,
som lär hålla för en logisk granskning än idag.

Parallellpostulatet (det femte)

Det femte postulatet stack ut matematiker i ögonen redan från början.
Som du själv märkt, är dess formulering betydligt längre och det verkar mer komplicerat än de fyra första.
Var det verkligen nödvändigt?
Skulle man inte kunna härleda den logiskt ur de fyra första?
Så resonerade många matematiker. Man ville gärna ha oberoende axiom och inga överflödiga.
Euklides själv undvek i det längsta att hänvisa till den –
flera satser i första boken kunde fått enklare bevis med hjälp av parallellpostulatet,
men det verkar som om Euklides ville testa hur långt man kan komma utan det.

Massor av felaktiga bevis för parallellpostulat kom under de 2000 åren efter Euklides,
och det inte från ”glada amatörer” utan från tidens stora matematiker!
Först försökte man hitta direkta bevis.
Senare övergick man mer och mer till försök till indirekta bevis:
Antag att de fyra första postulaten och femte postulatets negation gäller och försök härleda någon orimlighet.
Det kunde man inte!
(Speciellt jesuitprästen Saccheri (1667-1733) kan nämnas: han gjorde allting rätt,
ändå förkastade han till slut alla sina resultat med något ovidkommande teologiskt argument.)

Först under 1800-talet blev tiden tydligen ”mogen”, för då kom tre matematiker,
C.F.Gauss (1777-1855), Nikolay Lobatchevsky (1792-1856) och Janos Bolyai (1802-1860),
oberoende av varandra, fram till att man faktiskt kunde byta ut parallellpostulatet mot dess motsats –
givet en ”linje” ℓ och en punkt P utanför, så finns genom P *flera* ”linjer” som inte skär ℓ –
och (med alla övriga axiom oförändrade!) ändå få en logiskt invändningsfri teori,
den s.k. **icke-euklidiska geometrin**.

- *Euclid's Fifth Postulate and the Advent of Non-Euclidean Geometries* av Laurence J. Crosswell (sök på www)

Vilka påståenden får tas som axiom?

De ”uppenbara sanningarna”, skulle äldre tiders matematiker ha sagt.
Den synen ändrades under 1800-talet, inte minst som följd av den icke-euklidiska geometrins upptäckt.
[14]Visst är det vanligaste att man tänker på objekt ur verkligheten och förhållanden dem emellan, när man inför grundbegrepp och formulerar axiom, men alldeles nödvändigt är det inte – det kan, som alltid i matematiken, i alla fall senare visa sig värdefullt att ha undersökt konsekvenserna även av axiom, som inte ser ut att ha någon direkt motsvarighet i verkligheten.
Axiomen är ett slags ”spelregler” som vi fastställer. Man kan ändra dem – då spelar man ett annat spel.
Ofta kan man ersätta en uppsättning axiom med en annan, *ekvivalent* uppsättning.
(I den meningen att varje axiom i uppsättning 1 kan logiskt härledas ur axiomen i uppsättning 2, och tvärtom: varje axiom i uppsättning 2 kan logiskt härledas ur axiomen i uppsättning 1.)
Valet av axiom (och grundbegrepp) är mera en konventionsfråga än något ”av naturen givet”.
En matematisk teori uttalar sig inte om huruvida axiomen ”verkligen” är sanna” – allt teorin säger är att *om* axiomen är sanna, då är alla följande satser också sanna.
Detta innebär dock *inte* att vilka axiom som helst kan få matematiker att arbeta vidare hur som helst!
Tre aspekter, ur vilka man granskar en teoris axiomuppsättning, är:

i) Motsägelsefrihet (konsistens)

Det skall vara omöjligt att ur axiomen härleda såväl ett påstående som dess motsats – det måste man ovillkorligen kräva av varje samling axiom!
Motsägelsefrihet är dock högst besvärlig att fastslå!
Ett sätt är att peka ut ett system av ”existerande” objekt, som uppfyller axiomen – man säger då att man har konstruerat en *modell* för teorin. [15]
”Existerande” skall här tolkas inte bara som ”existerande i sinnevärlden”, utan även som ”existerande i någon motsägelsefri teori”.
Ofta klarar man inte mer än att återföra problemet till något annat, mera välbekant axiomsystem, som man redan ”levt med” ett tag, utan att finna motsägelser.
T.ex. kan man visa att Euklides axiomsystem är konsistent förutsatt att teorin för reella tal är det, genom att införa koordinatsystem (analytisk geometri).

ii) Fullständighet

All argumentation skall kunna hänföras till axiomen, inga underförstådda antaganden får användas.
Fullständigheten är lätt att slarva med.
Oftast sker axiomatiseringen först efter det att teorin börjat utarbetas – ett bra sätt att förvissa sig om att axiomen är meningsfulla – och då händer det gärna att man hoppar över verifikationen av vissa begrepp och förhållanden som man blivit van vid att använda.

iii) Oberoende

Inget axiom skall kunna härledas ur övriga. Det här är ett skönhetsideal, snarare än ett absolut krav.

[14]Framställningen i detta avsnitt följer
Asger Aaboe, *Antikens matematik. Från babylonierna till Ptolemaios*, Prisma, 1969, samt
Eike Petermann, *Analytiska metoder I*, Studentlitteratur

[15]Jo, du läste rätt: För naturvetare och tekniker är en teori en (förenklad) modell av verkligheten, men logiker kan säga att ett i verkligheten existerande system är en modell för en teori – de använder ordet *modell* på ett litet annorlunda sätt!

Geometri i skolan

Platon var inte matematiker själv, men antagligen den enskilda person som bidragit mest till den starka ställning den axiomatiska metoden och matematiken överhuvudtaget faktiskt fått inom västerlandets utbildningsväsen.
(Konstruktioner med passare och linjal lär han ha lagt ett särskilt gott ord om.)

"Här kommer du inte in, om du inte behärskar geometri!",
lär det ha stått inskrivet ovanför porten till Platons berömda Akademi.
Platonismen satte ju *idéerna* i första rummet och geometrin – ett område där idéerna (linjer, cirklar, etc.) ändå hade relativt handfasta och konkreta motsvarigheter i sinnevärlden – ansågs vara ett lämpligt övningsfält för den som ville "komma åt" de riktigt abstrakta idéerna ("det godas idé", "det sannas idé", ...)

På Newtons tid ...

> "Trots att Elementa inte var avsedd att vara någon lärobok i matematik för barn, har den använts som sådan i många länder under århundraden." (Häggmark, sid.28)

Det ligger en hel del i den här anmärkningen, men jag undrar, om den ändå inte är något missvisande.
Vilka barn tänkte du på, när du läste ovanstående? Femåringar? Tioåringar? Femtonåringar?
I svensk matematikdidaktikdebatt lyser tonåringen med sin frånvaro – det finns barn och vuxna, men knappast några däremellan? (*Mitt lilla egna intryck.*)
England var kanske det land där man envisast höll fast vid en "obefläckad" Elementa som lärobok. (Charles Dodgson, alias Lewis Carroll, som på sin fritid författade *Alice i underlandet*, var egentligen matematiker till yrket[16] och gjorde 1879 en jämförelse av marknadens geometrilaroböcker med slutsatsen att Euklides Elementa fortfarande var bäst ...). Då skall man emellertid betänka att den klassiska geometrin faktiskt var ett universitetsämne (och inte alla gick till Oxford eller Cambridge!), ända fram till 1800-talets andra hälft, då den flyttades ner till gymnasiet! [17]
Å andra sidan, var det kanske vanligare med tonårsstudenter förr i tiden?
Det är vanskligt med alltför långtgående historiska jämförelser:

> "På Newtons tid, var kunskaper i matematik förunnat ett fåtal.
> Chefen för Londons hamn, ämbetsman Samuel Pepys, tyckte att han också borde lära sig och studerade två timmar varje dag i flera års tid. Vad var det han försökte lära sig?
> Jo, multiplikationstabellen!
> Idag kan de flesta elever lära sig multiplikationstabellen utan större våndor och det beror på att de får växa upp i en kutur som är mycket mer matematisk och naturvetenskaplig än på Newtons tid.
> Detta menar lärarutbildaren, matematiklektorn Mats Martinsson i Göteborg." [18]

[16] Att Häggmark på sid.117 kallar honom "barnboksförfattare" är alltså missvisande!
[17] J.L.Heilbron, *Geometry Civilized*, Oxford, 1998
[18] Universitetsläraren, 1997:5

Den nya matematiken (1960-talet)

Om vi inskränker perspektivet till 1900-talet, så är det dock ovedersägligt att den klassiska geometrin utgjorde en mycket större del av skolkursen i matematik tidigare, men utmönstrades helt i samband med den "nya matematikens" intåg på 1960-talet. Det gäller inte enbart Sverige utan även de andra västländerna. Det måste vara den vågen Häggmark åsyftar i sitt förord med "...de år då geometri ägnades ett förstrött intresse och av många skolmän betraktades som ett omodernt ämnesområde". (I öststaterna, däremot, har geometrin åtnjutit en fortsatt stark ställning.) En tanke var att Euklides geometri skulle ersättas av ett kraftfullare redskap, linjär algebra[19].

> More than anybody else, it is Dieudonné[20] who is responsible for the decline in the teaching of geometry. Dieudonné's insistence on teaching linear algebra in senior secondary school as a substitute for pure geometry made him pronounce in 1959 that 'Euclid must go!' The complete sentence he used reveals even more completely the responsibility he bears: 'And if the whole program I have in mind had to be summarized in one slogan it would be: Euclid must go!' For a number of reasons Dieudonné's words still affect the teaching of geometry in the West. Since some 25-35 years ago, specialized geometry textbooks have disappeared. In mathematics textbooks, indeed, several aspects of geometry are presented in connection with other topics, but since the beginning of the 1980s these topics have been mainly related to calculating perimeters, areas and volumes. Exercises in the form of mechanical drills using ready-made rules or 'formulas' have become the main objective in teaching geometry. This has come to constitute one of the main problems in mathematics education in Western countries today. [21]

Mängdläran försvann visserligen relativt snabbt, men geometrin har aldrig riktigt "återhämtat sig", även om de allra mest grundläggande satserna återkommit till gymnasiekurserna under 1990-talet.

[19] HiH är inte ensam om att erbjuda en kurs med namnet *Geometri och linjär algebra.*

[20] Jean Dieudonné (1906-1992), fransk matematiker, medlem i den grupp som blev känd under pseudonymen Bourbaki.

[21] George Malaty, *Eastern and Western mathematical education: unity, diversity, and problems*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1998, no.3, pp.421-436.

Hur gångbar är Euklides idag?

Floden av geometriläroböcker "i Euklides anda" har inte sinat – den kanske senaste i Sverige är

> Göran Lindahl, *Euklides geometri*, Natur och Kultur, 1987

I sitt förord framhåller Lindahl (f.1925) följande syften/förtjänster med en kurs i euklidisk geometri:

> 1) Ge insikter i geometri;
>
> 2) Ge övning i logiskt tänkande;
>
> 3) Ge insikt i hur ett formellt system är uppbyggt med axiom och definitioner.
>
> "Det är min förhoppning att denna bok ska stimulera till arbete med geometriska bevis i skolan. Enligt min erfarenhet finns det inget område av matematiken som så starkt bidrar till en ökad förståelse av matematiska samband som just geometriska bevis. Den kombination av sträng logik och konkreta bilder, som förekommer vid genomförandet av geometriska bevis, ger utmärkta tillfällen til övning i tankereda."

Lindahl går igenom invändningar mot undervisningen i den axiomatiska euklidiska geometrin,
för att komma underfund med hur denna kunde åka ut från skolkursen så raskt och lätt,
så hittar han egentligen ingen annan "ursäkt" än att den ... upplevts som svår.
Han har medhåll av historikern Heilbron:

> Studenter har svårt att anamma bevisandan, eftersom behov och syfte inte är uppenbara.
> Beviset för detta påstående följer från det faktum att alla andra klassiska civilisationer –
> Egypten, Mesopotamien, Indien, Kina – hade praktisk geometri,
> men ingen behandlade den som en deduktiv vetenskap.
> Studenter skall inte bli otåliga, om de inte genast fattar poängen med bevisresonemang.
> Hela civilisationer missade poängen helt och hållet. [22]

[22] J.L.Heilbron, *Geometry Civilized*, Oxford, 1998; min övers.

Debattinlägg från Ann-Marie Mårtensson-Pendrill, prof. i teoretisk atomfysik, Göteborg, http://fy.chalmers.se/~f3aamp/veta/pyth.html, publicerat i Nämnaren, 1999, nr.4:

Matematik – en naturvetenskap?

> *The development of Western Science is based on two great achievements:*
> *the invention of the formal logical system (in Euclidean geometry) by the Greek philosophers, and*
> *the discovery of the possibility to find out causal relationship by systematic experiment (Renaissance).*
> *In my opinion one has not to be astonished that the Chinese sages have not made these steps.*
> *The astonishing thing is that these discoveries were made at all.* (Albert Einstein)

Håller en av de pelare som bär upp västerländsk vetenskap på att vittra bort ?
Kommer nästa generation att fortfarande förstå kraften i ett matematiskt bevis?
Håller vi på att tappa bort vår historia?

Under hösten 1999 har jag haft glädjen att få möta
tre studentgrupper under deras första vecka vid universitet/högskola:
En grupp med inriktning mot naturvetenskaplig utbildning,
en blandad grundskolelärargrupp och en Ma-No-lärarstudenter.
De fick i uppgift att besvara några frågor "Hur vet vi att...", som jag utnyttjat några år.
Ny för i år var dock punkten "... att Pythagoras sats är sann", införd efter att en matematiker
gjort mig uppmärksam på att studenter inte alltid ser skillnad mellan matematik och naturvetenskap.

Resultatet var omskakande. Av de studenter som hann svara på frågan
svarade c:a 2/3 något i stil med att man vet det efter att ha prövat på många olika trianglar.
Kanske ännu mer förvånande var några svar "ingen har ännu bevisat att den är falsk".
Poppers "falsifierings-kriterium" har tydligen slagit igenom, även där det inte borde göra det!
Endast en minoritet av studenterna har alltså angett "bevis" som övertygande argument för Pythagoras' sats.
(Någon minns sin lärares stora glädje efter en lektion då han lyckats bevisa Pythagoras sats' på tavlan!)

Den Euklidiska geometrins ställning i skolan har försvagats under en lång tid.
Att kunna konstruera figurer med hjälp av passare och linjal upplevs ofta som mycket stimulerande,
men den praktiska nyttan av denna kunskap har naturligtvis minskat
genom tillkomsten av lättanvända ritprogram för datorer.

Datorövningar med t.ex. *Geometer's Sketchpad* är utmärkta hjälpmedel för att
upptäcka samband genom systematiska experiment – men ett väsentligt steg måste vara att
också ta sig tiden att bevisa de samband dataskärmen indikerar.
Att kombinera "hands-on" med "minds-on" är viktigt både för matematik och naturvetenskap!
Missunna inte nästa generation den intellektuella glädjen över matematiska bevis!

- Anm. Lägg märke till att engelskan har olika ord för *bevis* :
  Inom matematiken använder man *proof*, inom naturvetenskap – *evidence.*

Varför "passare och linjal"-konstruktioner ?

Om det är som Häggmark skriver – att kunskaper om geometriska konstruktioner
kan komma till pass, när man tapetserar och möblerar hemma – så bra!
Jag anser att konstruktionsproblemen har existensberättigande av ett annat skäl:
som övningar på att tillämpa de geometriska satserna *baklänges*, vilket kräver en mera aktiv kunskap.

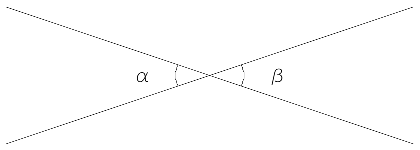
Exempel: Om man har en romb given, så är det inte svårt att inse att diagonalerna är bisektriser till hörnvinklarna.
Detta kan nu användas, om man har en vinkel given och vill dra bisektrisen:
konstruera först en romb med den givna vinkeln som en av vinklarna och dra sedan diagonalen!
Det säger sig självt att det andra problemet är svårare –
det gäller att själv "uppfinna" romben i en situation, där den inte finns!

Som matematiklärare har man ett ansvar att motarbeta missuppfattningen
att matematik skulle handla om att räkna efter recept –
det gör våra elektroniska maskiner mycket snabbare och säkrare nuförtiden –
människor behövs i situationer där uppenbara lösningsrecept saknas.

VINKLAR

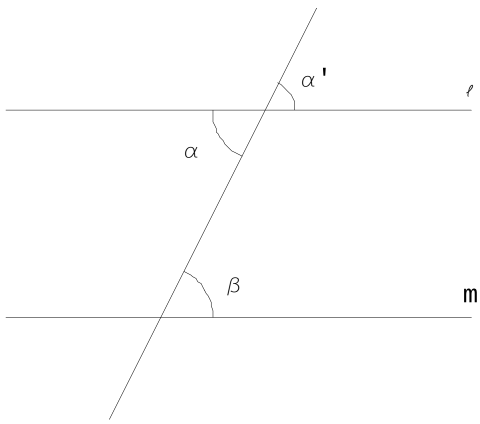
Våra axiom

- *Vertikalvinklar* är lika stora:



$$\alpha = \beta$$

- Vid parallella linjer är *alternatvinklar*
(och därmed även likbelägna vinklar) lika:
(α och β kallas alternatvinklar, α' och β – likbelägna)



$$\ell \text{ och } m \text{ parallella } \implies \alpha = \beta$$

- Omvändningen till föregående är också sann:

$$\alpha = \beta \implies \ell \, \text{och} \, m \, \text{är parallella}$$

- **Parallella linjer** definieras som
(räta) linjer utan någon skärningspunkt.

  I vardagslivet tänker man väl oftast på linjer,
mellan vilka avståndet är detsamma,
oavsett var man mäter,
men detta är svårare att precisera matematiskt.

  I den icke-euklidiska geometrin
är parallellitet och konstant avstånd olika saker!

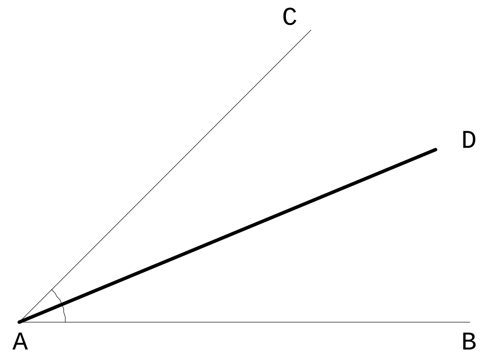
- Symbol för parallellitet: $\|$

$$\ell \parallel m \text{ betyder att}$$
$$\ell \text{ är parallell med } m$$

Väsentlig terminologi

- Förkortningar för "vinkel": $\measuredangle$, $\angle$ alt. $\wedge$
($\measuredangle BAC$ alt. $\angle BAC$ alt. $\wedge BAC$ i figuren nedan)

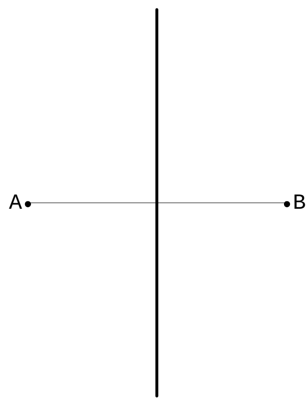
- **Bisektris** kallas en rät linje genom en vinkels spets,
som delar vinkeln i två lika stora vinklar.



$$AD \text{ är bisektris till } \measuredangle BAC$$
$$\text{då } \measuredangle BAD = \measuredangle CAD$$

- **Normal** till en linje ℓ kallas
en linje som skär ℓ under rät vinkel.
Skärningspunkten kallas normalens **fotpunkt**.

- **Mittpunktsnormal** till en sträcka AB är
en normal till linjen AB, som
har sin fotpunkt i mittpunkten på sträckan AB.



- **ortogonal** mot = vinkelrät mot
Ortogonala linjer
är linjer som är vinkelräta mot varandra.

- Symbol för ortogonalitet: $\perp$

$$\ell \perp m \text{ betyder att}$$
$$\ell \text{ och } m \text{ är vinkelräta mot varandra}$$

Mindre väsentlig terminologi

Sidovinklar, komplementvinklar, supplementvinklar, vertikalvinklar, likbelägna vinklar, alternatvinklar, transversal, ...

För det mesta klarar man sig utan dessa ord , om man bara ritar en figur (och det gör man väl gärna). Det finns nog läroböcker som ägnar oproportionerligt mycket uppmärksamhet åt termer – kom ihåg att

Terminologi är inget självändamål !

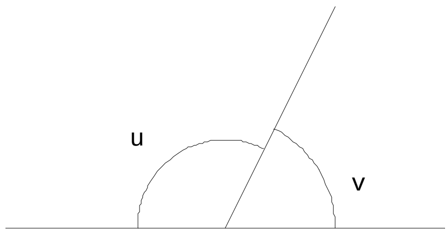
(Det väsentliga är att komma fram till satserna, som säger vad objekten har för egenskaper!)

*Komplement-/supplement*vinklar är vinklar med summan 90° resp. 180° och för det mesta är det lika enkelt och bra att säga så.

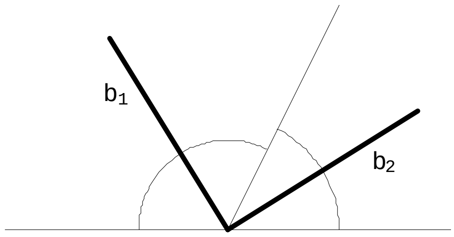
Anm. Det är från *komplementvinkel* som förstavelsen **co** i cosinus och cotangens kommer:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\\ \cot x &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\end{aligned}$$

1. Till en vinkel u och dess sidovinkel v (Två vinklar, som har ett ben gemensamt medan de andra två benen tillsammans bildar en rät linje, kallas *sidovinklar*.)



dras bisektriserna b_1 och b_2 :



Hur stor är vinkeln mellan b_1 och b_2 ?

2. Hur måste tre räta linjer i ett plan ligga i förhållande till varandra, för att det *inte* ska bildas någon triangel ?

Vinkelsumman i en triangel

Matematiken är ibland som en stor stad –
man kan komma fram till en och samma slutsats /
ett och samma ställe / längs olika vägar.
Just för en lärare är det ofta värdefullt
att känna till mer än en väg till ett och samma mål.

[Häggmark, sid.30] radar upp inte mindre än
fem idéer om hur man kan demonstrera
att vinkelsumman i en triangel är 180 °.
Jämför och ev. kommentera!

3. Mät vinklar med gradskiva och addera.

4. En modern variant av föregående
kan man idag hitta på www:
Ett datorprogram låter dig
flytta på ett triangelhörn m.h.a. musen.
Vinklarna räknas ut på nolltid av maskinen
och summan redovisas för dig: 180.0 °.

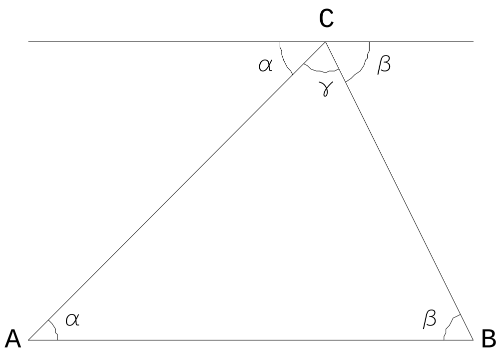
5. Rita och klipp ut en papperstriangel.
Klipp ut hörnen och lägg dem intill varandra.

- "Vik ihop"-demonstrationen i högerspalten.

6. Gå runt med en penna längs triangelns sidor.
Vrid den lika mycket som resp. vinkel vid varje hörn
(Ställ framändan i hörnet och vrid bakändan, så att
framända byts mot mot bakända vid varje hörn.)
och konstatera att pennan vridit sig 180 °,
när den kommit tillbaka till utgångsläget.

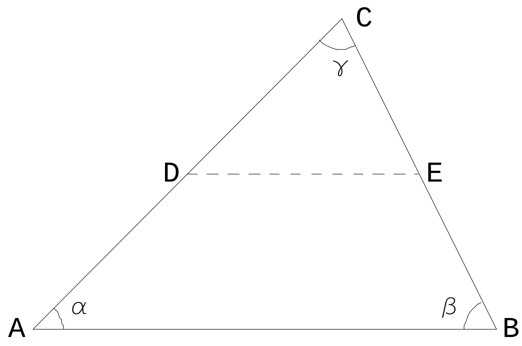
7. Modifikation av föregående:
Gå med pennan runt triangeln, men
låt spetsen hela tiden peka i gångriktningen
Räkna på hur mycket du svänger vid varje hörn
och hur mycket totalt.

8. Euklides bevis, som bygger på parallellaxiomet:
Genom C dra en linje parallell med AB.

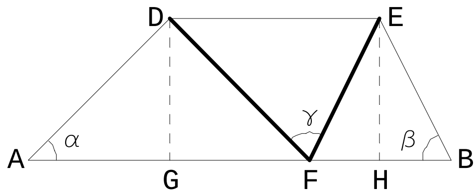


Alternatvinklar vid parallella linjer är lika,
så man får vinklarna α och β vid sidan om γ vid C.
Men summan av de tre vinklarna vid C är 180 °.

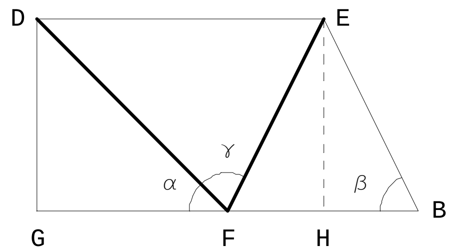
9. ("Vik ihop"-demonstrationen)
Rita en stor triangel ABC.
Klipp ut triangeln. Bestäm genom mätning
mittpunkterna D och E på AC resp. BC.



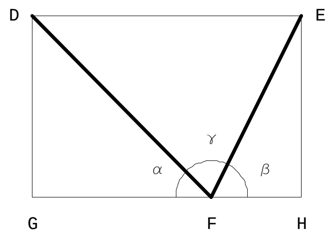
Vik triangeln längs DE.
Då kommer C att falla i en punkt F på AB.



Tag reda på mittpunkten G på AF
och vik papperstriangeln kring GD.
Då kommer A att sammanfalla med F.



Tag reda på mittpunkten H på BF
och vik papperstriangeln kring EH.
Då kommer B att sammanfalla med F.

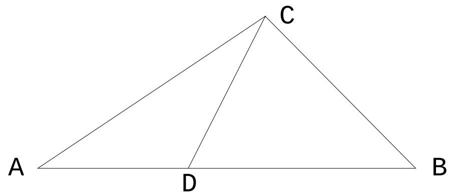


Vinklarna α, β och γ
utgör tillsammans ett halvt varv, d.v.s. 180 °.

Observera att resonemanget innehåller
några obevisade påståenden:
"Då kommer ... att falla / sammanfalla ...").
Hur förklarar du att de är sanna ?

10. Vad är det för fel på följande "bevis" för att vinkelsumman i en godtycklig triangel är $180\,°$?

Inför
$x =$ vinkelsumman i en godtycklig triangel.
Låt ABC vara en sådan.
Tag en punkt D på sidan AB
och betrakta vinkelsummorna i
dels ABC, dels deltrianglarna ACD och BCD.



$$
\begin{aligned}
\measuredangle ACB + \measuredangle BAC + \measuredangle ABC &= x \\
\measuredangle ACD + \measuredangle CDA + \measuredangle DAC &= x \\
\measuredangle BCD + \measuredangle CDB + \measuredangle DBC &= x
\end{aligned}
$$

Addera de två senare ekvationerna
under utnyttjande av

$$
\begin{aligned}
\measuredangle ACD + \measuredangle BCD &= \measuredangle ACB \\
\measuredangle CDA + \measuredangle CDB &= 180\,°
\end{aligned}
$$

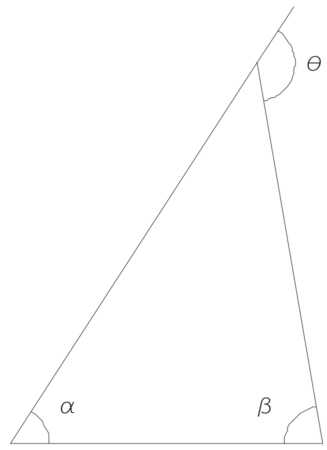
så fås:

$$
\begin{aligned}
\measuredangle ACB + 180° + \measuredangle BAC + \measuredangle ABC &= 2x \\
x + 180° &= 2x \\
x &= 180\,°
\end{aligned}
$$

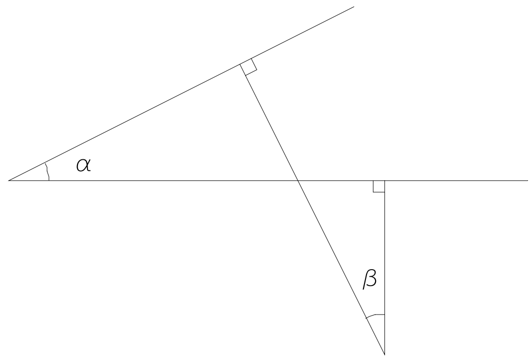
I efterföljande uppgifter får du gärna utnyttja (även om vi, än så länge, inte skrivit upp det vare sig som sats eller axiom) den välbekanta **basvinkelsatsen** :
en triangel är likbent $\Longleftrightarrow$ vinklarna vid basen är lika,

11. Bevisa **yttervinkelsatsen**:
En yttervinkel till en triangel är lika med summan av de motstående inre vinklarna:

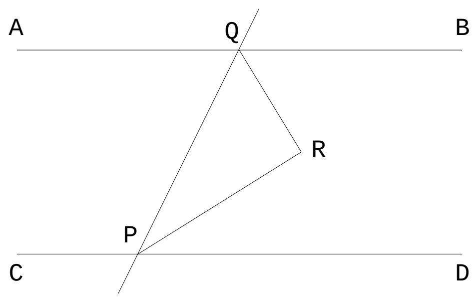
$$\theta = \alpha + \beta$$



12. Visa att $\alpha = \beta$ i figuren nedan

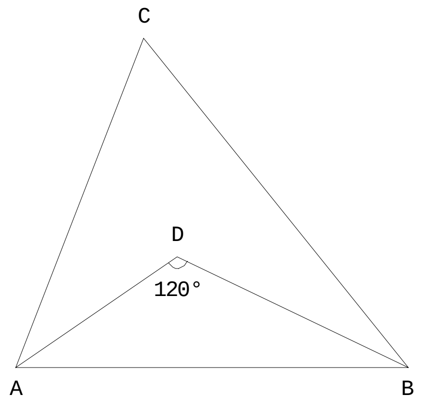


13. Linjerna AB och CD är parallella,
QR är bisektris till $\wedge PQB$
PR är bisektris till $\wedge QPD$.
Visa att $PR \perp QR$



14. I en likbent triangel PRS är vinkeln $P = 48\,°$.
Bisektrisen till P skär sidan RS i punkten T.
Hur stor är vinkeln PTR?
(OBS! Frågor har inte alltid entydiga svar!)

15. Bisektriserna til vinklarna A och B i triangeln ABC skär varandra under vinkeln $120\,°$.
Hur stor är vinkeln C ?



16. Förklara varför alla konvexa (se övning 30)

(a) fyrhörningar,

(b) n-hörningar

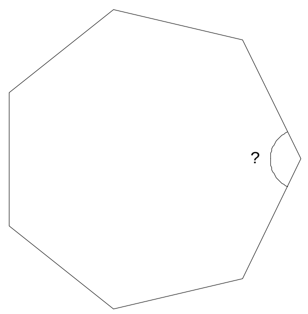
har samma vinkelsumma. Hur stor är den?

Minst två alternativa resonemang finns.
(OBS. hur mycket effektivare
ett resonemang kan vara än idogt mätande:
vet man vinkelsumman i en triangel,
så kan man i ett slag sluta sig till
vinkelsumman i en n-hörning!)

Om månghörningen *inte* är konvex ?

17. I en regelbunden månghörning är definitionsmässigt vinklarna mellan intilliggande sidor lika stora.
Hur stora är dessa vinklar

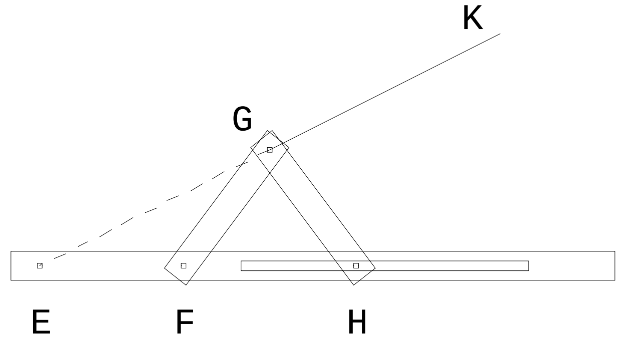
(a) i en regelbunden 7-hörning ?



(b) i en regelbunden n-hörning ?

18. En båt går rätlinjigt fram med en fart av 3 knop[23].
Då man passerar en viss punkt R,
mäts vinkeln mellan färdriktningen
och riktningen mot ett sjömärke S, snett framför.
Sedan väntar man på att den vinkeln fördubblas.
Säg att det inträffar 20 min senare, i punkten T.
På vilket avstånd är man då från S,
d.v.s. hur långt är det från T till S ?

19. För tredelning av en given vinkel konstruerade Blaise Pascal (1623-1662) följande instrument :



Här är $EF = FG = GH$.
Länkarna FG och GH är vridbara i F och G.
Punkten H glider i ett spår utefter linjen HL.

Vilken vinkel är 1/3 av vilken?

20. I en triangel dras höjderna mot två av sidorna samt bisektrisen till vinkeln mellan dessa sidor.
Höjderna skär bisektrisen under lika vinklar !

21. Givet en triangel med kända vinklar.
Betrakta mittpunktsnormalerna till två av sidorna.
Är det säkert att de skär varandra?

Om ja, vad kan du säga om skärningsvinkeln ?

22. I en triangel är två av höjderna *minst lika långa* som sidorna de är dragna mot.
Hur ser triangeln ut ?

23. Är det säkert att mot en längre sida i en triangel alltid ligger en större vinkel? Försök utreda m.h.a.

(a) basvinkelsatsen, alt.

(b) trigonometri.

24. Hur är det med omvändningen till påståendet i föregående fråga?

[23] 1 knop = 1 distansminut / timme
1 distansminut = 1852 meter

25. Låt $ABCD$ vara en parallellogram.
Dra bisektriserna till de fyra vinklarna.
Det bildas då en fyrhörning, kalla den $KLMN$.
Vad kan man säga om den?

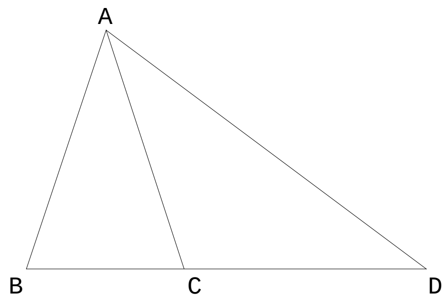
26. (Forts. på föregående
som kanske kräver trigonometri.)

Hamnar K, L, M, N alltid innanför $ABCD$?
Om inte,
för vilka parallellogrammer gör de inte det?

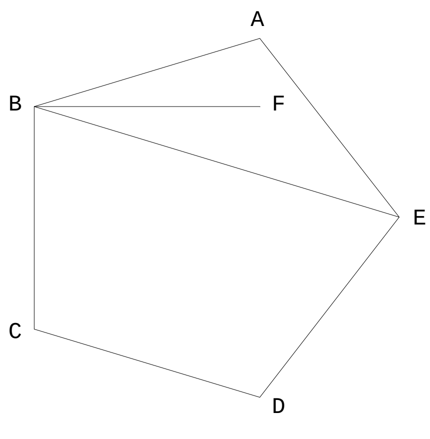
För vilka parallellogrammer
blir $KLMN$ en kvadrat?

För vilka parallellogrammer
degenererar $KLMN$ till en punkt?

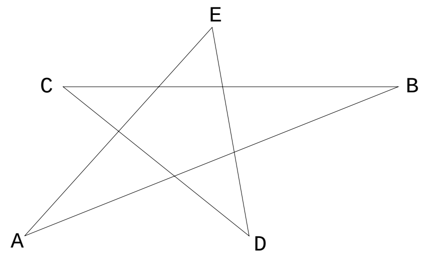
27. Linjen AC är bisektris till vinkeln BAD.
Sträckorna AB, AC och CD är lika långa.
Hur stor är vinkeln D ? Avgör utan mätningar!



28. $ABCDE$ är en regelbunden femhörning
(de fem sidorna är lika långa och
vinklarna dem emellan är lika stora).
BF är bisektris till vinkeln ABE.
Bestäm, utan mätningar, vinkeln CBF.



29. Summan av vinklarna A, B, C, D, E
är densamma för alla s.k. pentagram –
femuddiga "stjärnor" som i figuren nedan:



Hur inser man det
och hur stor är vinkelsumman ?

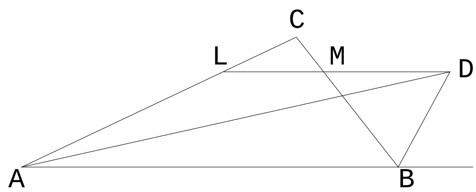
30. Kan en konvex månghörning
ha fler än 3 spetsiga vinklar ?

(En plan eller tredimensionell figur
kallas **konvex**, om
närhelst två punkter P och Q ingår,
så även alla punkter på sträckan PQ.)

31. Visa att för varje $n \geq 3$ finns en konvex
månghörning med exakt 3 spetsiga vinklar.

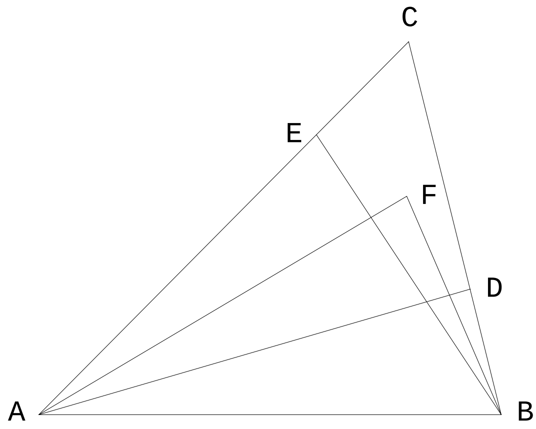
(Tips: Induktionsbevis.)

32. Bisektrisen till $\measuredangle A$ och bisektrisen till *yttervinkeln*
vid B i triangeln ABC skär varandra i D.
Genom D dras en parallell till AB.
Denna skär AC och BC i L resp. M.
Antag att längderna AL och BM är kända.
Uttryck i dem längden LM.



33. Som föregående, men antag nu att
ABC är liksidig och dess sida är känd.

34. Låt ABC vara en godtycklig triangel och låt E och D vara punkter på sidorna AC resp. BC. Punkten F inuti triangeln är sådan att AF och BF är bisektriser till $\measuredangle CAD$ resp. $\measuredangle CBE$.



(a) Visa att

$$\measuredangle AEB + \measuredangle ADB = 2\measuredangle AFB$$

(b) Är likheten sann då, E eller D sammanfaller med C?

(c) Är likheten sann då E och D ligger på sidornas förlängningar bortom C?

35. I triangeln ABC är D en punkt på sidan AC sådan att $AD = AB$. Det gäller att

$$\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = 30^\circ$$

Hur stor är $\measuredangle CBD$?

36. En åker i form av en polygon med omkrets p har kring sig ett staket på avståndet 1. (D.v.s. för varje punkt på staketet, betraktat som en kurva i ett plan, är avståndet till närmaste åkerpunkt 1.)

Hur långt är staketet?

37. För triangeln ABC är ($\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$)

$$\beta - \alpha = 30^\circ$$

D en punkt på AC så att $CD = BC$.
Hur stor är $\angle ABD$?

38. Från hörnet A i $\triangle ABC$ dras normalen till vinkeln B:s bisektris. Låt D beteckna fotpunkten. Genom D dras den linje som är parallell med BC. Visa att den skär sidan AB i dess mittpunkt.

39. I den likbenta triangeln ABC ($AC = BC$) är D och E punkter på sidorna AB resp. BC, så att även CDE är likbent ($CD = CE$) Vilket samband råder mellan $\angle ACD$ och $\angle BDE$?

40. En dag lät man ett flygplan starta från var och en av städerna i ett land. Varje flygplan flög till närmaste stad. (Avstånden var samtliga olika sinsemellan, så varje stad hade ett entydigt bestämd närmaste grannstad.) När alla plan landat, visade det sig att i ingen stad hade fler än 5 flygplan landat. Visa att detta inte är någon tillfällighet – det är omöjligt att fler än 5 flygplan landar i en och samma stad under de här förutsättningarna.

41. Triangeln ABC är trubbvinklig och likbent, $AB = AC$. Punkterna D och E ligger på sidorna BC resp. CA, så att AD och DE delar in ABC i tre *likbenta* deltrianglar, ABD, ADE och CDE. Hur stora vinklar har triangeln ABC ?

Sfäriska trianglar

För att inse att frågan om vinkelsumman i en triangel inte är trivial, behöver vi nog ett kontrastexempel.

- Skulle man kunna prata om trianglar på ytan av en sfär? Vad skulle det vara för figurer i så fall?

  En vanlig plan triangel kan sägas vara en sammansättning av tre raka linjesträckor.
  Om vi kunde se någon motsvarighet till raka linjesträckor på sfären, så skulle vi ha ett förslag.

- Finns det någon egenskap som är karaktäristisk för räta linjesträckor i ett plan och som är relevant även för krökta kurvor på en krökt yta som sfären?

  Den räta linjesträckan är den *kortaste vägen* mellan två punkter i ett plan.
  Uppenbara kandidater för rollen som "raka sträckor" är alltså lösningarna till problem av typen "Givet två punkter på en krökt yta, bestäm den kortaste vägen mellan dem längs ytan (d.v.s. den kurva som ligger i ytan, sammanbinder punkterna och har kortaste möjliga längd)."
  Den matematiska termen för sådana kurvor är: **geodetiska linjer**.

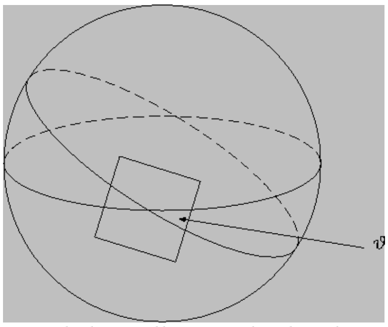
- Vilka är då de geodetiska linjerna på en sfär? Givet två punkter på en sfär, hur skall man förflytta sig mellan dem längs sfären så att vägen blir så kort som möjligt?

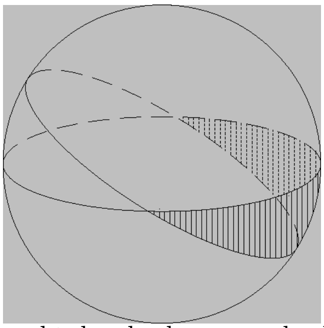
  Denna fråga låter sig nog inte utredas riktigt med enbart elementär matematik[24],
  men svaret är enkel att formulera (och har väl varit erfarenhetsmässigt känt länge):
  Man skall röra sig längs en **storcirkel**,
  d.v.s. skärningen mellan sfären och ett plan genom sfärens medelpunkt.
  (Jordens ekvator och meridianerna är storcirklar, om vi betraktar jorden som en perfekt sfär. Polcirklarna är det däremot inte.)

  Notera att storcirklarna *delvis* uppfyller även en av Euklides postulat för linjer:
  Genom två olika punkter på en sfär, så går det en storcirkel.

  Då är vår definition av en sfärisk triangel klar:
  tre punkter på sfären, sammanbundna med storcirkelbågar.

- Skulle vi kunna sätta ut mätetal på vinklarna i en sfärisk triangel?

  Som vinkeln mellan två krökta kurvor i en punkt där de skär varandra kan vi betrakta **vinkeln** v **mellan** deras **tangenter**. Då har vi reducerat problemet till vanlig vinkelmätning!

  För storcirklar på en sfär är denna densamma som vinkeln mellan storcirklarnas plan.

42. Betrakta sfäriska trianglar med ett hörn i "nordpolen" och två på "ekvatorn".
    Vad är vinkelsumman i sådana trianglar?

43. Se högra figuren ovan.
    Två storcirklar bestämmer en s.k. måne (eng. lune; den krökta ytdelen av en "apelsinklyfta").
    (Egentligen fyra, parvis lika stora, månar kan vi urskilja i figuren.)

    Hur stor andel av hela sfärens area utgör en måne med vinkeln v radianer?

---

[24] Elementär matematik = matematik utan derivator och integraler.

- Area av krökta ytor är ett inte så enkelt begrepp, som i allmänhet också kräver integralkalkyl, men för att diskutera arean av delar av en sfär som begränsas av storcirklar, räcker det med följande:
  - Arean av en hel sfär med radien R är $4\pi R^2$.
  - Arean av en union av icke överlappande ytor är lika med summan av deras areor.
  - Arean av kongruenta ytor (som kan överföras i varandra genom förflyttning i rummet) är lika.
  - Arean av en måne med vinkeln v radianer är $2R^2 v$

Med hjälp av ovanstående kan vi visa:

Girards formel [25]För sfäriska trianglar, på en sfär med radien R, gäller sambandet

$$\text{arean } = R^2 \,(\text{vinkelsumman } - \pi)$$

OBS! Vinkelsumman i sfäriska trianglar är alltså alltid $> \pi$,
och hur mycket större – det beror på triangelns storlek!

Bevis (av Euler, 1781): (Se ev. http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/gos4.html
Där kan man rotera en sfär och titta på den från olika håll.)

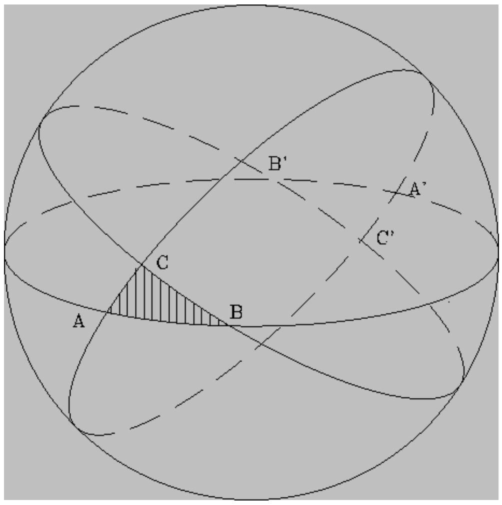
Det är ingen inskränkning att anta att triangeln ligger inom en halvsfär:
En större triangel kan vi stycka upp i två deltrianglar,
såväl arean som (vinkelsumman $-\pi$) är additiva storheter
och sålunda, om sambandet stämmer för delarna, så måste den stämma även för helheten.

Obs. att varje sfärisk triangel ABC har en lika stor "spegelbild" $A'B'C'$ på sfärens "motsatta" sidan.[26]

Två storcirklar som bestämmer en av triangelns vinklar,
t.ex. $BAB'A'$ och $BCB'C'$,
bestämmer två icke överlappande månar:
en som innehåller vår triangel, $BAB'CB$,
och en som innehåller triangelns spegelbild, $BC'B'A'B$

Vi betraktar nu unionen av tre månar,
en för varje triangelvinkel, som valts så att
två av månarna innehåller vår triangel,
medan den tredje innehåller dess spegelbild,
t.ex. $ABA'CA$, $BCB'AB$ och $CA'C'B'C$.

Denna unions area är 2·vinkelsumman $\cdot R^2$.



Å andra sidan täcker den en halvsfär, varav vår triangel två gånger,
samt vår triangels spegelbild (som tillhör den andra halvsfären).Alltså

$$2 \cdot \text{vinkelsumman} \cdot R^2 = 2\pi R^2 + 2\,(\text{triangelns area})\,, \qquad \text{V.S.B.}$$

44. Hur kan man av formeln ovan se att
det inte kan vara lätt för lantmätare att upptäcka att vinkelsumman skulle vara $> \pi$?

45. Är parallellpostulatet sant i den sfäriska geometri vi givit oss in på ovan?

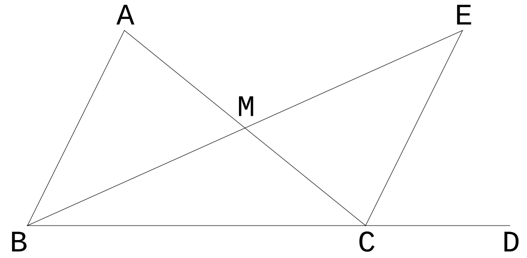
[25]Efter Albert Girard (1595-1632) som 1626 publicerade en bok om trigonometri.
[26]Spegling i sfärens medelpunkt: givet en punkt P på sfären, dra linjen genom P och sfärens medelpunkt – denna diameterlinjes andra skärn.punkt med sfären är spegelbilden av P. På engelska kallas avbildningen **the antipodal map**.

Om vinkelsumman utan parallellpostulatet

- Varje bevis för att vinkelsumman i en vanlig triangel är exakt π
  visar sig kräva något antagande som är ekvivalent med parallellpostulatet.
  Redan Euklides intresserade sig emellertid för hur långt man kan komma utan det och i sats I.16 visar han att de övriga postulaten ensamma medför följande **svag**a **variant av yttervinkelsatsen**:

  $$\text{varje yttervinkel är } > \text{ var och en av de två inre motstående vinklarna}$$

  (Yttervinkelsatsen är ju skarpare än det här, men dess bevis
  utnyttjade att vinkelsumman i triangeln är exakt π, vilket i sin tur utnyttjar parallellpostulatet.
  Poängen här är att vi får ihop ett bevis som är *oberoende av parallellpostulatet*!)

  Bevis: Låt ABC vara en godtycklig triangel,
  och D – någon punkt på förlängningen av sträckan BC.
  Vi vill visa att $\measuredangle ACD > \measuredangle BAC$.
  (Det räcker,
  ty samma resonemang efter förlängning av AC till D'
  ger att $\measuredangle ACD' > \measuredangle ABC$,
  men $\measuredangle ACD' = \measuredangle ACD$ som vertikalvinklar.)

  Låt M vara mittpunkten på AC och förläng BM till E, så att M blir mittpunkt på BE.
  Nu kan man med stöd i svaret till fråga 79 – om diagonalerna i en fyrhörning skär varandra i mitten, så måste fyrhörningen vara en parallellogram – dra slutsatsen att

  $$\measuredangle ACD > \measuredangle ACE = \measuredangle BAC$$

46. Även i denna fråga glöm parallellpostulatet och därmed att vinkelsumman i en triangel $= \pi$.
    Visa att föregående resultat implicerar att i alla fall summan av *två* vinklar i en triangel är $\leq \pi$.

47. Med hjälp av metod och resultat ovan, så får man **Saccheri-Legendre**s sats:
    Om man utelämnar parallellpostulatet och stöder sig på de övriga bara[27],
    så kan man dra slutsatsen att vinkelsumman i en triangel alltid måste vara $\leq \pi$.

    Motsägelsebevis: Låt oss anta att vinkelsumman i en viss triangel ABC, där vi valt beteckningarna så att $\measuredangle ABC$ är minst, är $= s > \pi$. (Figuren ovan stämmer inte i det avseendet, men den duger att titta på ändå!)
    Som ovan drar vi en sträcka BE, vars mittpunkt sammanfaller med AC:s mittpunkt.

    (a) Triangeln BCE måste ha samma vinkelsumma som ABC – varför?

    (b) Den minsta vinkeln i BCE är $\leq \frac{1}{2}\measuredangle ABC$, som var den minsta vinkeln i ABC.

    Genom att upprepa den här proceduren n gånger
    kan vi alltså konstruera en triangel med vinkelsumma $= s$ och minsta vinkel $\leq \measuredangle ABC/2^n$.
    Om n är tillräckligt stort, så är $\measuredangle ABC/2^n < s - \pi$, och summan av övriga två skulle vara $> \pi$.
    Men detta motsäger resultatet i föregående fråga! Alltså finns ingen triangel med vinkelsumma $> \pi$.

48. Om nu Euklides övriga axiom implicerar att vinkelsumman skall vara $\leq \pi$,
    medan den för sfäriska trianglar visade sig vara $> \pi$,
    så måste det vara något i dem som inte stämmer i den sfäriska geometrin – ge exempel på sådant!

[27] De fyra första samt Hilberts kompletteringar som berördes på sid. 15.

TRIANGLAR

KONGRUENS

Ett första försök till definition:

- Def. (version 1) Kongruenta trianglar kallar vi trianglar som har samma form och storlek.

Låter bra, men
ur matematisk synvinkel är det alltför oprecist.
Trianglars storlek och form karaktäriseras av sex storheter: längden/storleken av

tre sidor och tre vinklar

- Def. (version 2) Kongruenta trianglar kallar vi trianglar som har sidor och vinklar parvis lika.

För säkerhets skull, bör vi kanske ändå förtydliga hur "parvis" skall tolkas.

- Def. (version 3, definitiv) Vi säger att

  trianglarna ABC och KLM är **kongruenta** (alt. ABC är **kongruent med** KLM)

  och skriver detta kort

  $$\triangle ABC \cong \triangle KLM,$$

  om det är så att

  $$\begin{array}{rcl} |AB| &=& |KL| \\ |BC| &=& |LM| \\ |AC| &=& |KM| \\ \measuredangle ABC &=& \measuredangle KLM \\ \measuredangle BCA &=& \measuredangle LMK \\ \measuredangle CAB &=& \measuredangle MKL \end{array}$$

- OBS. **Bokstävernas ordning är väsentlig!** Hörnen skall svara mot varandra i den ordning de är uppskrivna!

49. Vad säger man normalt om $\triangle ABC$, om det är så att $\triangle ABC \cong \triangle BAC$?

50. Vad säger man normalt om $\triangle ABC$, om det är så att $\triangle ABC \cong \triangle BCA$?

Vi kan nu fortsätta att tänka på och prata om kongruenta trianglar som trianglar som har "samma form och storlek" (men antar olika lägen i rummet – man kan tänka att två trianglar är kongurenta om den ena kan överföras i den andra genom förflyttning, vridning, spegling eller någon annan operation som bevarar avstånd och vinklar), men vi vet nu vad vi menar med detta – att vissa sidor och vinklar är lika stora på det sätt definitionen föreskriver!

De sex likheterna är inte oberoende av varandra – det kan räcka att veta att tre av dem är uppfyllda, för att dra slutsatsen att även övriga tre gäller! De s.k. **kongruensfall**en är sådana situationer.

Innan vi slår upp i någon bok, låt oss fundera själva förlitandes på vår geometriska intuition :
(Häggmark frångår här sin laborativa angrepssätt och avslöjar allt redan i början – litet dumt, kanske.)

Vilka sidor/vinklar räcker det att känna till för att triangeln skall vara helt bestämd till form och storlek, d.v.s. för att även övriga sidor och vinklar skall vara bestämda ?
Räcker det att känna till ...

51. ... de tre vinklarna ?

52. ... de tre sidorna ?

53. ... en sida och två vinklar ?

54. ... två sidor och en vinkel ?

55. ... två sidor och mellanliggande vinkel (d.v.s. vinkeln mellan dessa två sidor) ?

56. ... två sidor och någon annan vinkel än den mellanliggande ?
    Om inte, ser du något enkelt tilläggsvillkor som säkerställer kongruens ?

Om vi i resonemanget blandar in andra triangelelement än sidor och vinklar:
Räcker det att känna till ...

57. ... två sidor och höjden mot en av dessa ?

58. ... två sidor och höjden mot den återstående sidan?

59. ... en höjd och vinklarna som denna höjd bildar med triangelns sidor ?

- Kongruensbegreppet har en generalisering till godtyckliga figurer (punktmängder) – se sid.43.

Läraren:	Hur många sidor har en triangel?
Eleven:	Två.
Läraren:	??? (Håller upp en triangel av papp för att ”konkretisera”.)
Eleven:	(förtydligar sig:) Fram- och baksidan.

De tre kongruensfallen

- De sex likheterna mellan sidor och vinklar på föregående sida är inte oberoende av varandra.
  De fyra kongruensfallen
  är fyra fall då *det räcker* att veta att vissa tre av de sex likheterna är uppfyllda, för att dra slutsatsen att även övriga tre gäller.
  De brukar betecknas

1:a kongruensfallet (SVS) (sida-vinkel-sida-fallet)

$$AB = KL, \quad \measuredangle A = \measuredangle K, \quad AC = KM$$

2:a kongruensfallet (SSS) (sida-sida-sida-fallet),

$$AB = KL, \quad BC = LM, \quad AC = KM$$

3:e kongruensfallet (VSV) (vinkel-sida-vinkel-fallet)

$$AB = KL, \quad \measuredangle A = \measuredangle K, \quad \measuredangle B = \measuredangle L, \quad \text{alt. } \measuredangle C = \measuredangle M,$$

- Vi tar de fyra kongruensfallen som axiom.

60. I en triangel är sidorna a, b resp. c.
    Man vet att $a \neq b \neq c$.
    Kan man påstå att triangeln *inte* är likbent ?

61. Två trianglar har sidorna a, b, c resp. a_1, b_1, c_1.
    Man vet att $a \neq a_1, b \neq b_1$ och $c \neq c_1$.
    Kan man påstå att trianglarna *inte* är kongruenta?

62. Från en punkt på en cirkel avsätt radien upprepade gånger med en passare.
    Det förefaller som om delningen går jämnt ut.
    Stämmer detta exakt? Alltid?

63. Är följande ett acceptabelt bevis för tredje kongruensfallet utifrån det första fallet ?
    Antag $AB = KL$, $\measuredangle A = \measuredangle K$, $\measuredangle B = \measuredangle L$.
    Avsätt D på strålen AC så att $AD = KM$.
    Då är $\triangle ABD \cong \triangle KLM$ enligt första fallet.
    Därmed $\measuredangle ADB = \measuredangle KML$.
    Det medför att C och D sammanfaller.

Standarbeteckningar för trianglar:

hörn	:	A, B, C
sidorna(s längder)	:	a, b, c
vinklarna	:	α, β, γ
höjderna	:	h_a, h_b, h_c

varvid $a, \alpha, h_a, ...$ är den sida, vinkel, höjd... som ligger mot hörn A, etc.

"Fjärde kongruensfallet"

Antag att för trianglarna ABC och $A_1B_1C_1$

$$\begin{cases} |AB| = |A_1B_1| \\ |BC| = |B_1C_1| \\ \measuredangle A = \measuredangle A_1 \end{cases}$$

Måste de vara kongruenta?

- Om det råkar vara så att

  $$\measuredangle A = \measuredangle A_1 = 90^\circ$$

  ger Pythagoras sats att

  $$|AC| = b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a_1^2 - c_1^2} = b_1 = |A_1C_1|$$

  och vi har kongruens enligt SSS-fallet.
  (Däremot går det inte att åberopa SVS-fallet, då det inte är mellanliggande vinklar som är lika.)

  Men skulle det inte duga med (t.ex.) 89° eller 91° i stället för 90° ovan ?

- Om vi tänker oss $A_1B_1C_1$ "lagd ovanpå" ABC, så att A_1B_1 sammanfaller med AB och $\overrightarrow{A_1C_1}$ pekar åt samma håll som $\overrightarrow{AC}$, kommer C och C_1 att ligga på samma stråle från A.
  Frågan kan då formuleras:
  Om C och C_1 är två punkter på en stråle som ligger lika långt från en tredje punkt $B = B_1$, måste då $C = C_1$?

  Naturligtvis inte : C och C_1 kan vara spegelbilder av varandra i den normal till strålen som går genom B.

- Men obs. att i ett sådant fall är $\wedge C$ och $\wedge C_1$ av olika typ: den ena trubbig, den andra – spetsig.

  Om ytterligare information ger att $\wedge C$ och $\wedge C_1$ är **av samma typ** måste trianglarna vara kongruenta.

- Så är fallet – $\wedge C$ och $\wedge C_1$ är av samma typ – om $\wedge A$ och $\wedge A_1$ är största vinklar i sina trianglar – näst största vinkeln i en $\triangle$ kan inte vara trubbig.
  (Speciellt gäller detta om $\wedge A = \wedge A_1 = 90^\circ$ – en rät vinkel är alltid störst i sin triangel.)

64. "Fjärde kongruensfallet"-problematiken vid triangelsolvering:

    En triangel har sidorna 17 resp. 12 l.e. och vinkeln mot den sistnämnda sidan är 40°.
    Beräkna övriga vinklar.

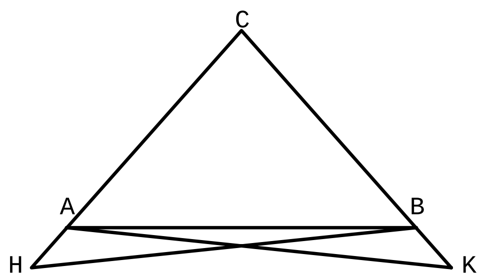
Basvinkelsatsen

I en likbent triangel är vinklarna vid basen lika stora:

$$(AC = BC) \Longrightarrow \alpha = \beta$$

65. Euklides hade denna sats redan som nr 5
och av kongruensfallen hade han så här långt
formulerat och bevisat endast det första,
så hans bevis fick inte åberopa de två andra.

Så här gick Euklides bevis till:



Tag en punkt H på CA:s förlängning.
Tag K på CB:s förlängning så att $CH = CK$.

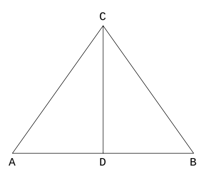
(a) Visa att CAK och CBH är kongruenta.

(b) Visa att ABH och BAK är kongruenta.

(c) Av b) följer nu att
$\wedge CAB = \wedge CBA$ – hur?

Du kanske undrar,
om det verkligen skall behöva vara så krångligt?
Då är du i gott sällskap. Det här beviset
är berömt i lärdomshistorien och har fått namnet
åsnebryggan (varvid "brygga" används i sin äldre betydelse av *bro*; lat. *pons asini*),
dels för att figuren ger associationer till en bro,
men också för att många elever stod som åsnor
inför beviset – det var för långt och komplicerat –
"åsnorna" vägrade ta sig över bron / beviset.[28]

66. De pedagogiska svårigheterna med Euklides bevis
gav upphov till flera förenklingsförsök:
På 1800-talet började man övergå till följande
"mera pedagogiska" alternativ:



a) Låt CD vara höjden ...
b) Låt AD vara bisektris till vinkeln A ...

[28]Enligt Svensk ordbok, 1986:
åsnebrygga = lärobok eller liknande hjälpmedel för trög / obegåvad studerande (som i detalj förklarar även rena självklarheter)

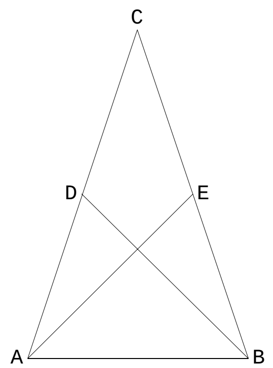
Men med denna "nya pedagogik" gjorde man sig skyldig till den på sid. 15 omtalade logiska försummelsen: ingenting i Euklides axiomsystem säger att
höjden / bisektrisen behöver skära linjen AB !

Så det har genom åren funnits goda skäl för eleverna att betrakta bevisföringen inom geometriämnet, som ett spel med något oklara logiska regler ...

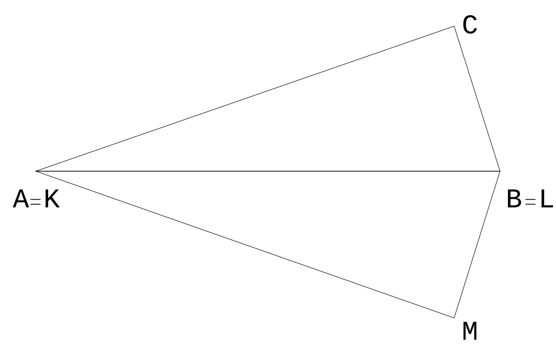
67. Basvinkelsatsen för tredje gången:
Hitta ett kongruensbevis som är
enklare än alla ovannämnda !

68. Formulera och bevisa med kongruens
omvändningen till basvinkelsatsen ovan.
(Ofta är det hela ekvivalensen
som kallas för basvinkelsatsen.)

69. ABC är en likbent triangel med $AC = BC$.
D och E är mittpunkterna på AC resp. BC.
Hitta tre par av kongruenta trianglar i figuren.

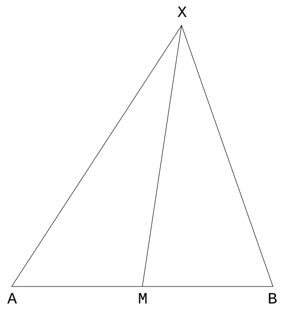


70. Bevisa andra kongruensfallet m.h.a.
första kongruensfallet och basvinkelsatsen
(vars bevis alltså inte kräver 2:a eller 3:e fallet)
och följande figur:



Mittpunktsnormaler och bisektriser

- Givet två punkter, A och B, i ett plan,
  vilka punkter i planet befinner sig
  på lika stort avstånd från A som från B?



Svar: Exakt de punkter som ligger på sträckan AB:s mittpunktsnormal !

Obs. att påståendet har två delar:
(Låt M = mittpunkten på AB
och kalla mittpunktsnormalen m.)

- $$X \in m \Longrightarrow |AX| = |BX|$$

  Bevis:

$$\begin{array}{rcl} X & \in & m \\ & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} |AM| = |BM| \\ MX \text{ gemensam} \\ \measuredangle AMX = 90^\circ = \measuredangle BMX \end{array} \right. \\ & \Longrightarrow & AMX \cong BMX \text{ enl. SVS-fallet} \\ & \Longrightarrow & |AX| = |BX| \end{array}$$

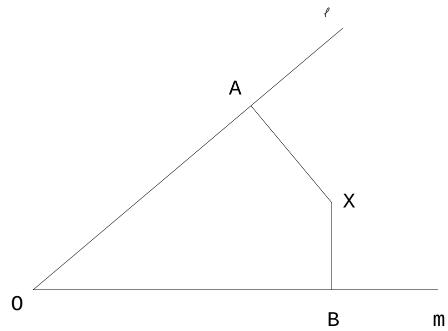
- $$|AX| = |BX| \Longrightarrow X \in m$$

  Bevis:

$$\begin{array}{rcl} |AX| & = & |BX| \\ & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} |AM| = |BM| \\ MX \text{ gemensam} \\ |AX| = |BX| \end{array} \right. \\ & \Longrightarrow & AMX \cong BMX \text{ enl. SSS-fallet} \\ & \Longrightarrow & \measuredangle AMX = \measuredangle BMX \\ & \Longrightarrow & \measuredangle AMX = \measuredangle BMX = 90^\circ \\ & \Longrightarrow & MX \text{ är mittpunktsnormal till } AB \\ & \Longrightarrow & X \in m \end{array}$$

- **median** = en sträcka som
  förbinder ett triangelhörn
  med motstående sidas mittpunkt.

- Givet en vinkel AOB,
  vilka punkter i planet befinner sig
  på lika stort avstånd från vinkelbenen ℓ och m ?



Svar: Exakt de som ligger på bisektrisen till AOB

Låt β beteckna bisektrisen, A och B – fotpunkterna till normalerna från X mot resp. vinkelben.

- $$|AX| = |BX| \Longrightarrow X \in \beta$$

  Bevis:

$$\begin{array}{rcl} |AX| & = & |BX| \\ & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} |AX| = |BX| \\ OX \text{ gemensam} \\ \measuredangle OAX = 90^\circ = \measuredangle OBX \end{array} \right. \\ & \Longrightarrow & OAX \cong OBX \text{ enl. fjärde kongruensfallet} \\ & \Longrightarrow & \measuredangle AOX = \measuredangle BOX \\ & \Longrightarrow & OX \text{ är bisektris till } AOB \end{array}$$

- $$X \in \beta \Longrightarrow |AX| = |BX|$$

  Bevis

$$\begin{array}{rl} & \left\{ \begin{array}{c} \measuredangle AOX = \measuredangle BOX \\ OX \text{ gemensam} \\ \measuredangle OAX = 90^\circ = \measuredangle OBX \end{array} \right. \\ \Longrightarrow & OAX \cong OBX \text{ enl. tredje kongruensfallet} \\ \Longrightarrow & |AX| = |BX| \end{array}$$

71. I en likbent triangel är
    toppvinkelns bisektris vinkelrät mot basen –
    visa med kongruenta trianglar.
72. Visa att i en likbent triangel
    är medianen mot basen
    såväl bisektris som mittpunktsnormal.
73. Medianerna mot benen i en likbent triangel
    är lika långa.
74. Vad måste gälla för en triangel för att
    en bisektris också skall vara median ?

Omvändningen till en sats som har formen av en implikation

Matematikens satser har formen av antingen implikation eller ekvivalens :

implikation : Om X gäller, så gäller även Y. (X är förutsättning/antagande
$X \Longrightarrow Y$ Y är slutsats)

ekvivalens : X gäller då och endast då Y gäller.
(om och endast om)
$X \Longleftrightarrow Y$, eg. en förkortning för $X \Longrightarrow Y$ och $Y \Longrightarrow X$

Matematiker strävar efter att formulera sina resultat i formen av ekvivalenser[29],
men tänk på att sådana egentligen är ett system av två implikationer,
så bevisen kan ofta behöva vara tvådelade – en för varje implikation.
Var noga med att hålla koll på, åt vilket håll implikationerna går, när det handlar om sådana!

Pythagoras sats kan exempelvis formuleras:
Beteckna en triangel sidor med a, b, c och vinkeln mot c med γ. Då gäller :

$$\gamma = 90^\circ \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Med samma beteckningar kan vi emellertid ställa upp även den omvända implikationen

$$a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow \gamma = 90^\circ$$

Sant? Ja, det är det, men det är *inte* Pythagoras sats – det är **omvändningen** till Pythagoras sats.
(Att egyptiska lantmätare konstruerade räta vinklar
genom att med ett rep bilda en triangel med vissa speciella proportioner mellan sidorna,
är alltså en illustration av omvändningen av Pythagoras sats, inte av själva Pythagoras sats!)
En räkning med cosinussatsen[30] visar samtidigt såväl Pythagoras sats som dess omvändning.
Men alla de bevis, som utgår från en rätvinklig triangel, visar endast den första implikationen!

Differentialkalkylens användbarhet på optimeringsproblem bygger på följande viktiga implikation:
För en deriverbar funktion f gäller

$$f \text{ har lokalt maximum/minimum i } x = a \Longrightarrow f'(a) = 0$$

Hur lyder omvändningen och är den sann?

$$f'(a) = 0 \Longrightarrow f \text{ har lokalt maximum/minimum i } x = a$$

Nej, den är inte sann: motexempel är $f(x) = x^3$, $a = 0$ (s.k.terasspunkt)

En annan implikation, vars omvändning *inte* är sann är

$$f \text{ är deriverbar} \Longrightarrow f \text{ är kontinuerlig}$$

[29] Annars måste man ju minnas åt vilket håll implikationspilen skall gå!
[30] som i sin tur kan härledas från skalärproduktens egenskaper, *utan* hänvisning till Pythagoras sats!

Kongruensfallen: övningar

För följande påståenden formulera bevis som bygger på

- kongruens av trianglar,
- två linjer som skärs av en tredje är parallella $\Longleftrightarrow$ alternat-/ likbelägna vinklar är lika stora,
- resultat från föregående frågor.

Andra motiveringar kan också vara acceptabla, men nu övar vi oss på kongruens!

75. Om motstående sidor i en fyrhörning är parallella (d.v.s. fyrhörningen är en parallellogram), så måste de också vara lika långa.

76. Omvändningen till satsen du bevisat i föregående fråga är också sann.
(Först: Hur lyder den omvändningen?)
(Läroböcker brukar definiera romb som en parallellogram med lika långa sidor, men det här visar att det räcker med "en fyrhörning med lika långa sidor" – en sådan fyrhörning måste med nödvändighet vara en parallellogram.)

77. Om ett par av motstående sidor i en fyrhörning är såväl parallella som lika långa, så måste detsamma gälla även det andra paret (d.v.s. fyrhörningen är återigen en parallellogram).

78. Diagonalerna i en parallellogram skär varandra mitt itu.

79. Är omvändningen till föregående påstående sann?
(En laborativ undersökning av denna fråga skulle kunna gå till så att man fäster två pinnar i deras mittpunkter, varierar vinkeln mellan dem och undersöker om den fyrhörning pinnarnas ändar bestämmer är en parallellogram; [Häggmark, övn.11.11]).

80. I vilka parallellogrammer är diagonalerna lika långa?
Försök hitta minst två sätt att motivera ditt svar, varav det ena är med kongruenta trianglar.

81. Diagonalerna i en romb skär varandra under rät vinkel.
(En konsekvens av detta är att rombens area kan fås som halva produkten av dess diagonaler.)

82. Hur är det med omvändningen till föregående:
Om diagonalerna i en fyrhörning skär varandra under rät vinkel, måste det röra sig om en romb?

83. I vilka fyrhörningar är diagonalerna bisektriser till hörnens vinklar?

84. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = AD$ och $BC = DC$.
Visa att mittpunkten M på diagonalen BD ligger på linjen AC.

85. ”Avståndet mellan två parallella linjer är detsamma oavsett var man mäter det.”
D.v.s. låt ℓ och m vara två parallella linjer, A_1 och A_2 – punkter på ℓ, B_1 och B_2 – punkter på m, så att A_1B_1 skär antingen ℓ eller m under rät vinkel och detsamma gäller A_2B_2.
Visa att då måste $A_1B_1 = A_2B_2$.

86. Försök utnyttja föregående resultat (det finns andra, rentav enklare alternativ) till att bevisa att om diagonalerna i ett parallelltrapets är lika långa, så måste trapetset vara likbent.

87. Hur kommer kongruensbegreppet in, när man härleder att

$$\text{arean av en parallellogram} = (\text{basen}) \cdot (\text{höjden}) \quad ?$$

88. Kanterna på en vanlig ograderad linjal kan uppfattas som parallella linjer.
Konstruera med en sådan linjals hjälp en rät vinkel.

89. Betrakta det gemensamma området till två lika stora kvadrater, som ligger i planet så att den ena har ett av sina hörn i den andras mittpunkt.
Vilka värden kan detta områdes area anta, om man tar kvadraternas area som areaenhet ?

Problem

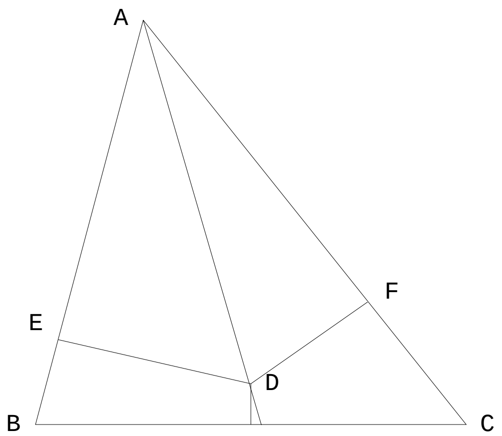
Where there are problems, there is life.
A.A.Zinoviev, The Radiant Future[31]

90. Hitta felet i följande "bevis" för att alla trianglar skulle vara liksidiga:

Vi visar att $AB = AC$ för en godtycklig triangel ABC
I och med att resonemanget inte förutsätter något speciellt om sidorna AB och AC, så ger det att även $BA = BC$ (och $CA = CB$), och därmed måste vår godtyckliga triangel vara liksidig!

Låt D vara skärningspunkten mellan bisektrisen till $\measuredangle A$ och mittpunktsnormalen till BC. Från D dra normaler till benen AB resp. AC. Beteckna med E resp. F dessa normalers skärningspunkter med resp. ben. Vi har två tänkbara fall:

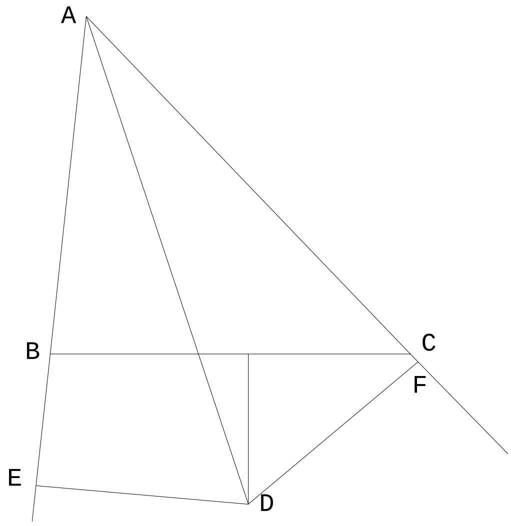
Första fallet: D ligger innnanför $\triangle ABC$:



Då har vi följande samband mellan sträcklängder:

$$\begin{aligned} AB &= AE + EB \\ AC &= AF + FC \end{aligned}$$

Andra fallet: D ligger utanför $\triangle ABC$.



Då gäller i stället

$$\begin{aligned} AB &= AE - EB \\ AC &= AF - FC \end{aligned}$$

I båda fallen måste emellertid gälla att

$$AE = AF,$$

eftersom D ligger på bisektrisen till A, samt

$$EB = FC,$$

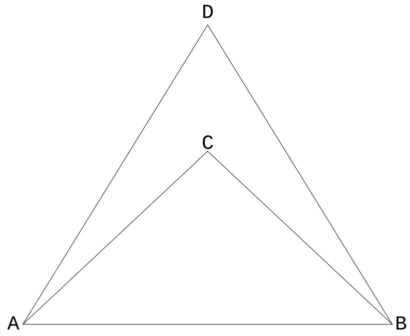
eftersom
D ligger på mittpunktsnormalen till BC,
$BD = CD$
och trianglarna BED och CFD är då kongruenta.
Alltså $AB = AC$. V.S.B.

Hjärnan ännu i mig vrides,
när jag tänker på Euklides
och på de trianglarna
ABC och CBA.
(Bellman)

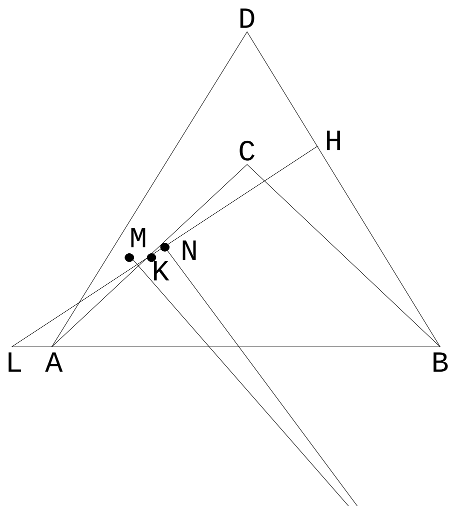
[31] Citerat i A.Gardiner, *Discovering Mathematics. The Art of Investigation*, Clarendon Press, Oxford, 1987

91. Hitta felet i följande "bevis" för att $\pi/3 = \pi/4$:

Låt ABC vara en likbent rätvinklig triangel, $AC = BC$, $\measuredangle C$ rät.
Tag D så att ABD blir liksidig, med C inuti :



Låt H vara den punkt på BD för vilken $BH = BC$.
Låt K vara mittpunkten på AC.
Dra linjen HK tills den skär AB:s förlängning i L.
Dra sträckan CL och kalla dess mittpunkt M.
Inför också HL och dess mittpunkt N.
Dra mittpunktsnormalerna till HL och CL och beteckna deras skärningspunkt med O.
O ligger på motsatt sida om CL jämfört med D :
(Har ritat BH litet kortare för att få plats med O. En korrekt figur har H högre upp, L närmare A, OM och ON nästan parallella och O längre ner.)



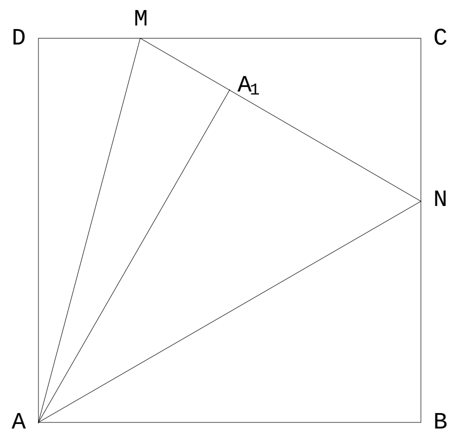
$\triangle OML \cong OMC$ enl. SVS-fallet.
Likaså $\triangle ONL \cong ONH$.
Därför är $OC = OL = OH$

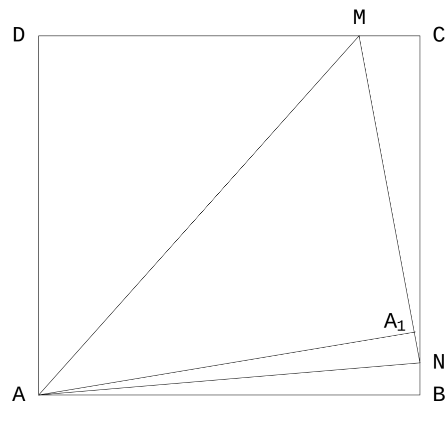
Jämför nu trianglar OBC och OBH.
Enligt konstruktionen är $BC = BH$.
Tillsammans med $OC = OH$ ger detta att trianglarna är kongruenta enligt SSS-fallet.
Då är alltså $\measuredangle OBC = \measuredangle OBH$.
Men den första vinkeln är $\pi/4$, ty ABC är en likbent rätvinklig triangel, och den andra är $\pi/3$, ty triangeln ABD är liksidig.
Således $\pi/4 = \pi/3$.

92. I kvadraten $ABCD$ är M och N punkter på sidorna CD resp. BC, så att

$$\measuredangle AMN = \measuredangle AMD$$

A_1 är fotpunkten av normalen från A mot MN.

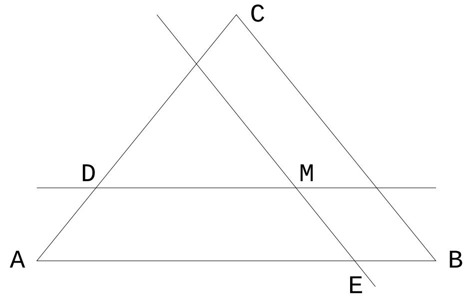




(a) Visa att A_1 och B ligger lika långt från linjen AN.

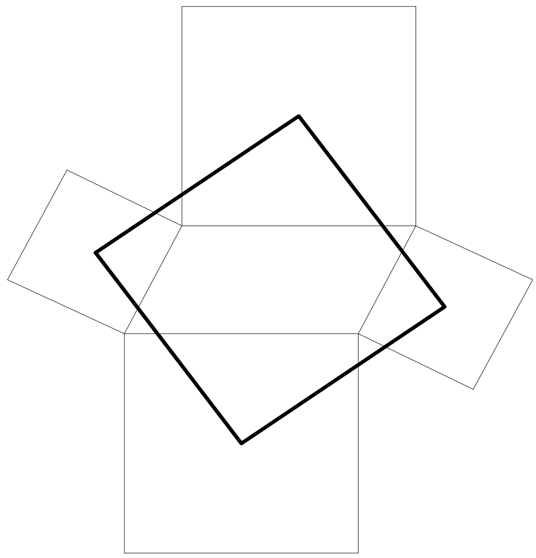
(b) Beräkna $\measuredangle MAN$.

93. Triangeln ABC är likbent, $AC = BC$,
ℓ är parallell med AB och skär AC i D.
g är parallell med BC och skär AB i E.
M är skärningspunkten mellan ℓ och g.



Visa att $AM = DE$.

94. Utanpå sidorna till en parallellogram uppritas kvadrater.
Kvadraternas mittpunkter
sammanbinds till en fyrhörning :



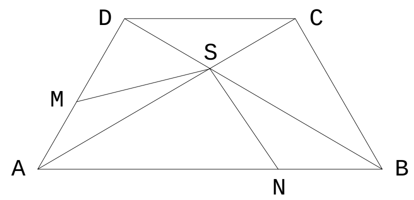
Visa att denna fyrhörning också är en kvadrat.

95. I parallelltrapetset $ABCD$ är

$$\begin{aligned} AB \| CD, \quad AB &> CD \\ BC &= CD \\ AC &= BD \end{aligned}$$

Låt $S =$ diagonalernas skärningspunkt,
M och N – punkter på AD resp. AB, så att

$$AM + AN = AB$$



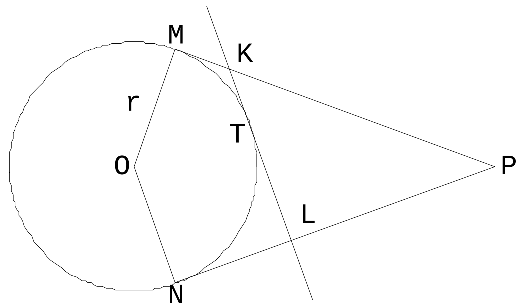
(a) Uttryck $\measuredangle MSN$ i $\measuredangle ASB$.

(b) Visa att, om dessutom

$$NS \| AD \text{ och} \measuredangle ASB = 108^\circ,$$

så måste M sammanfalla med D.

96. Låt c vara en cirkel och P en punkt utanför.
Genom P går två tangenter till c.
Tangeringspunkterna kallas M och N.
Låt T vara en punkt på den kortare av de två bågar
som M och N delar cirkeln i.
Tangenten i T skär MP och NP i K resp. L.



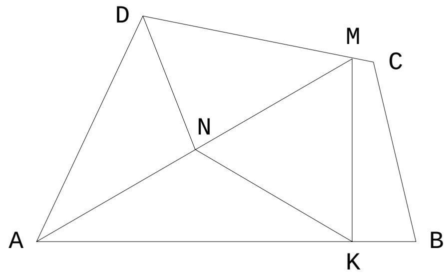
Uttryck

(a) omkretsen av $\triangle KLP$ i MP,

(b) arean av $\triangle KLP$
i längderna MP, KL och cirkelns radie r.

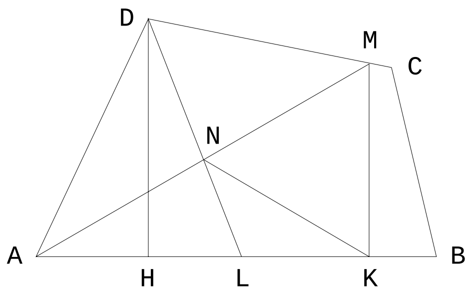
97. I fyrhörningen $ABCD$ är

AM bisektris till $\measuredangle A$, $M \in CD$
DN höjd i $\triangle AMD$, $N \in AM$
MK är höjd i $\triangle ABM$, $K \in AB$
$AN = NK$



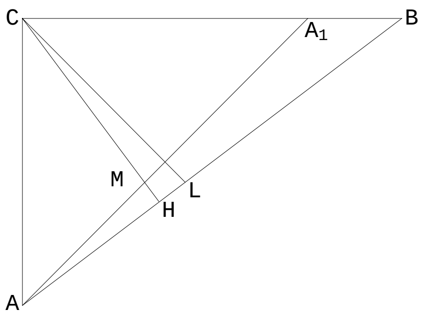
(a) Vad kan sägas om vinklarna i fyrhörningen $AKMD$?

(b) Låt DH vara höjd i $\triangle ABD$, $H \in AB$, och L – skärn.punkten mellan förlängningen till DN och AB.



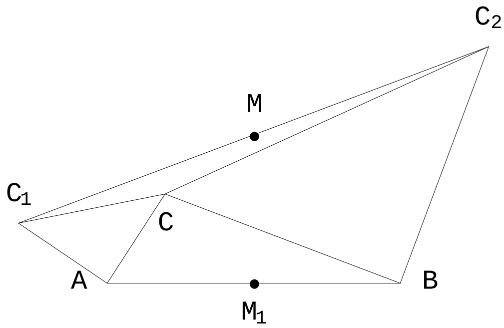
Beräkna
$$\frac{AH}{LK}$$

98. I triangeln ABC, där $\measuredangle C = 90°$ och $AC < BC$, är CH och CL höjd resp. bisektris från C. A_1 ligger på BC så att $A_1C = AC$. M är skärningspunkten mellan AA_1 och CH.



Visa att $CM = AL$.

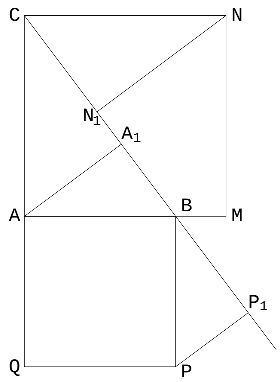
99. Utanpå triangeln ABC har man ritat likbenta rätvinkliga trianglar ACC_1 och BCC_2 med hypotenusor CC_1 resp. CC_2. C, C_1 och C_2 ligger på samma sida linjen AB. Låt M = mittpunkten på C_1C_2 och M_1 = mittpunkten på AB.



(a) Beräkna förhållandet mellan MM_1 och AB.

(b) Bestäm vinklarna i $\triangle ABM$.

100. Låt ABC vara en rätvinklig triangel med hypotenusa BC och $AB < AC$. Med kateterna AC och AB som sidor uppritar man kvadrater $AMNC$ och $ABPQ$, så att B blir en inre punkt på sträckan AM, och A en inre punkt på sträckan CQ. Från A, P och N drar man normaler mot linjen BC. Kalla fotpunkterna A_1, P_1 resp. N_1.



(a) Visa att $P_1N_1 = BC$

(b) Visa att $BN_1 > CN_1$

(c) Av b) följer att det på BN_1 finns en punkt K, sådan att $KN_1 = CN_1$. Uttryck vinklarna i $\triangle BMK$ i $\alpha = \measuredangle CNN_1$.

LIKFORMIGHET

(Lägg märke till analogierna med *kongruens*.)

Definitioner

- "*Likformiga* kallas figurer som har samma form."
  Så tänker man förvisso, men
  det räcker inte som definition inom matematiken,
  där vi vill kunna räkna på saker och ting.

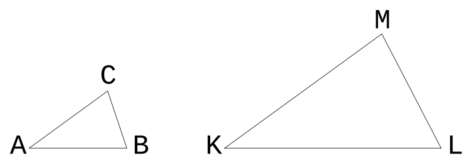
- Definition för trianglar:

  Trianglarna ABC och KLM
  säges vara *likformiga* och man skriver

  $$\triangle ABC \sim \triangle KLM$$

  när det är så att

  $$\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|AC|}{|KM|}$$
  $$\measuredangle A = \measuredangle K$$
  $$\measuredangle B = \measuredangle L$$
  $$\measuredangle C = \measuredangle M$$



101. *För trianglar* är ovanstående
(enl. andra likformighetsfallet – se vänsterspalten)
ekvivalent med Euklides kortare definition:

  ”Två trianglar säges vara likformiga
  om motsvarande vinklar är lika stora.”

  men redan när det gäller fyrhörningar,
  är lika vinklar och
  konstant längdförhållande olika saker – ge exempel!

De tre likformighetsfallen

- De fem likheterna i definitionen av likformighet
  är inte oberoende av varandra.
  De tre likformighetsfallen
  är tre fall då *det räcker* att veta att
  vissa två av de fem likheterna är uppfyllda,
  för att dra slutsatsen att även övriga tre gäller.

1:a likformighetsfallet Två sidor i ena triangeln
är proportionella mot två sidor i den andra
och de mellanliggande vinklarna är lika

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle A = \measuredangle K \\ \frac{AB}{KL} = \frac{AC}{KM}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle KLM$$

2:a likformighetsfallet Sidorna i ena triangeln
är proportionella mot sidorna i den andra

$$\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM} = \frac{AC}{KM} \Longrightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle KLM$$

3:e likformighetsfallet Två vinklar i ena triangeln
är lika stora med var sin vinkel i den andra

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle A = \measuredangle K \\ \measuredangle B = \measuredangle L\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle KLM$$

4:e likformighetsfallet Två sidor i ena triangeln
är proportionella mot två sidor i den andra, och
den mot den större av dessa sidor stående vinkeln
i den ena triangeln är lika med motsv. vinkel i den andra.
(Har själv aldrig stött mig på detta fall.)

- Obs. analogin med de tre första kongruensfallen:
  varje kongruensfall svarar mot ett likformighetsfall,
  där likhet mellan sidor byts ut mot att
  sidorna är proportionella.

  Kongruens kan sägas vara
  specialfallet av likformighet
  då sidoförhållandena är = 1.

- Även likformighetsfallen accepterar vi som axiom.

Kongruens och likformighet allmänt

- Två punktmängder säges vara **kongruenta**, om man kan låta dem svara mot varandra punktvis, så att avståndet mellan två godtyckligt valda punkter i den ena mängden är lika med avståndet mellan motsvarande punkter i den andra.
- Två punktmängder säges vara **likformiga,** om vi kan para ihop deras punkter så att avståndet mellan två godtyckligt valda punkter i den ena (*föremålet*) multiplicerat med ett tal $k > 0$ är lika med avståndet mellan motsvarande punkter i den andra (*bilden*). Talet k (som alltså är samma, oavsett vilket par vi väljer) kallas (**längd**)**skalan**.
- Alltså är kongruens detsamma som likformighet i skala 1.
- Att definitionerna inte säger något om vinklar, beror på att *vinklarna är helt bestämda av avstånden* – det följer av andra kongruens-7 likformighetsfallet (alt. cosinussatsen)
- Likformiga månghörningar skulle dock kunna definieras som: månghörningar, där vinklar tagna i samma ordning är lika, samt sidorna är proportionella.
- Beteckningar:

för kongruens	:	$\triangle ABC \cong \triangle KLM$
för likformighet	:	$\triangle ABC \sim \triangle KLM$

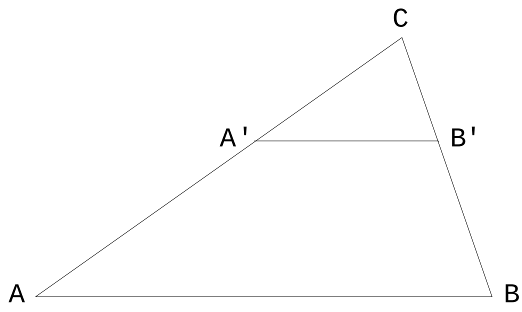
102. Den allmänna definitionen av likformighet ställer krav på oändligt många avstånd ("... godtyckligt valda punkter ..."). I praktiken, när vi tittar på trianglar, undersöker vi enbart triangelns sidor och vinklar. Bevisa m.h.a. likformighetsfallen att förhållandet mellan höjderna i två trianglar, som befunnits likformiga i den meningen att vinklar är lika och sidor proportionella, är detsamma som förhållandet mellan sidorna.

- **transversal** = linje som skär var och en ur en viss knippe linjer. I samband med trianglar: linje som skär två av en triangels sidor; **parallelltransversal** = linje som är parallell med en triangelsida och skär de två andra.

- Likformighetsfallen är det enda man behöver vid problemlösning med hjälp av likformighet.

Läroböcker brukar ändå inte sällan nämna :

- **(Parallell)transversalsatsen**: En parallelltransversal i en triangel delar två sidor i proportionella delar.



$$A'B' \| AB \Longrightarrow \frac{AA'}{A'C} = \frac{BB'}{B'C}$$

- **Transversalsatsens omvändning**: Samma konfiguration som i fuguren ovan.

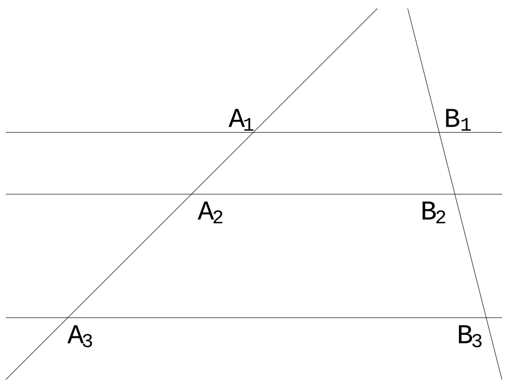
$$\frac{AA'}{A'C} = \frac{BB'}{B'C} \Longrightarrow A'B' \| AB$$

- **Topptriangelsatsen** :

  En parallelltransversal avskär en topptriangel som är likformig med hela triangeln.

- **Parallellprojektionssatsen**:

  Antag att linjerna ℓ_1, ℓ_2 och ℓ_3 (de horisontella) skär linjerna m_1 och m_2 i punkter A_1, A_2, A_3 resp. B_1, B_2, B_3 enl. figur :



Då gäller

$$\ell_1 \| \ell_2 \| \ell_3 \Longrightarrow \frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$$

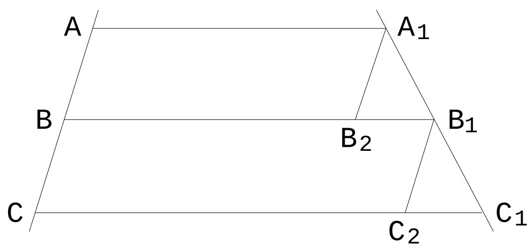
En anledning kan vara att
Euklides och andra noggrannare framställningar *bevisar* m.h.a. kongruensfallen först transversalsatsen och sedan likformighetsfallen.
Om man inte har för avsikt att fördjupa sig i bevisen, kan man koncentrera sig på likformighetsfallen – satserna ovan är specialfall eller kan härledas.
(OK – parallellprojektionssatsen kan vara bekväm att kunna hänvisa till direkt.)

- T.ex. följ. specialfall av parallellprojektionssatsen

$$\left.\begin{array}{c} AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \\ AB = BC \end{array}\right\} \Longrightarrow A_1B_1 = B_1C_1$$

(Med ord: Om tre eller fler parallella linjer avskär inbördes lika stora sträckor på en viss transversal, så avskär de också inbördes lika stora sträckor på varje annan transversal.)

skulle kunna bevisas
genom att dra paralleller till AC



observera att
$A_1B_2 = AB = BC = B_1C_2$ [två parallellogrammer]
och $\triangle A_1B_1B_2 \cong \triangle A_1B_1B_2$
enl. tredje kongruensfallet med
($A_1B_2 = B_1C_2$ och intilliggande vinklar lika).
Kongruensen ger nu$A_1B_1 = B_1C_1$.

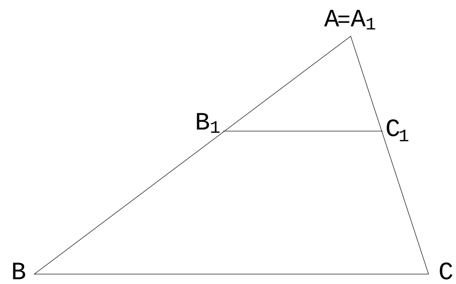
På detta kan man sedan bygga upp ett bevis för parallelltransversalsatsen.

Transversalsatsen och dess omvändning $\Longrightarrow$ likformighetsfallen

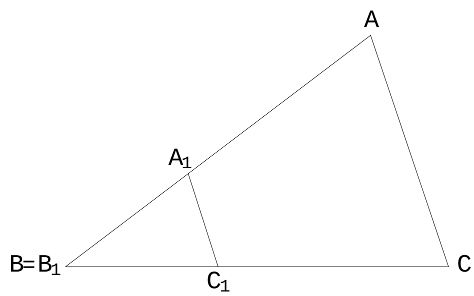
Som en liten övning i logik och bevisteknik, utreder vi på de närmaste $2\frac{1}{2}$ sidorna i detalj hur de tre likformighetsfallen hänger ihop med transversalsatsen och dess omvändning.

Låt, för korthetens skull,
TS = transversalsatsen, OmvTS = dess omvändning.
Det gäller alltså att visa att de två likheter som utgör förutsättningar i resp. likformighetsfall automatiskt medför giltigheten av övriga tre av de fem likheterna i definitionen.

- Tredje likformighetsfallet :
  (är ekvivalent med topptriangelsatsen)
  Vi har trianglar ABC och $A_1B_1C_1$ för vilka
  $$\begin{array}{rcl} \measuredangle A & = & \measuredangle A_1 \\ \measuredangle B & = & \measuredangle B_1 \end{array}$$
  och vill visa att det då måste gälla
  $$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$$
  (Att $\measuredangle C = \measuredangle C_1$ är klart direkt.)
  Att $\measuredangle A = \measuredangle A_1$
  gör att vi kan lägga trianglarna så här:
  (antar att $A_1B_1C_1$ är den mindre)



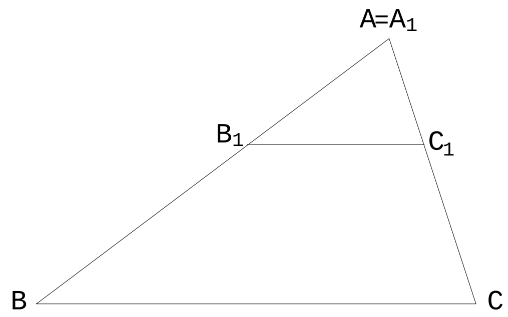
Att $\measuredangle B = \measuredangle B_1$ säger oss att
B_1C_1 är parallell med BC. Därmed
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} \text{ enl. TS}$$
Den andra likheten fås på samma sätt
genom att lägga $A_1B_1C_1$ i B-hörnet:



- Första likformighetsfallet :

$$\begin{aligned} \measuredangle A &= \measuredangle A_1, \\ \frac{A_1B_1}{AB} &= \frac{A_1C_1}{AC} \\ &\Downarrow \\ \triangle ABC &\sim \triangle A_1B_1C_1 \end{aligned}$$

Antag att förutsättningarna gäller.
Då kan vi lägga trianglarna,
så att den mindre utgör en hörnbit av den större:



OmvTS säger oss då att

$$B_1C_1 \| BC,$$

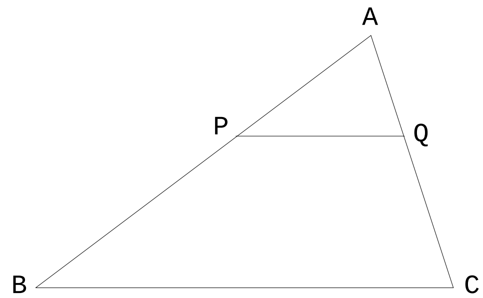
vilket innebär att övriga två triangelvinklar är parvis lika (som likbelägna vinklar vid parallella linjer). Därmed är förutsättningarna till tredje likformighetsfallet uppfyllda och det fallet har vi redan bevisat.

- Andra likformighetsfallet

Vi har alltså två trianglar ABC och $A_1B_1C_1$,
för vilka
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$$
och vill visa att

$$\begin{aligned} \measuredangle A &= \measuredangle A_1 \\ \measuredangle B &= \measuredangle B_1 \end{aligned}$$

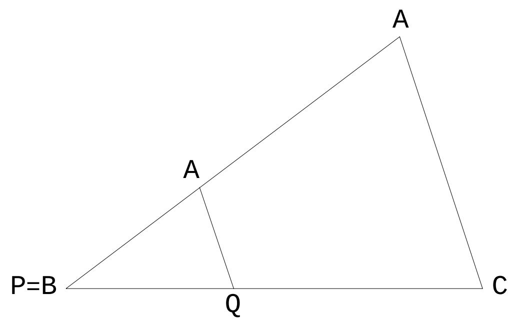
(Sedan återstår bara att åberopa tredje likf.fallet.)
Säg att $A_1B_1C_1$ är den mindre triangeln.
På sidorna AB och AC avsätt punkter P och Q
så att $AP = A_1B_1$ och $AQ = A_1C_1$



Enligt OmvTS är då PQ parallell med BC, så

$$\measuredangle APQ = \measuredangle B$$

Då kan vi lägga den lilla triangeln i B-hörnet

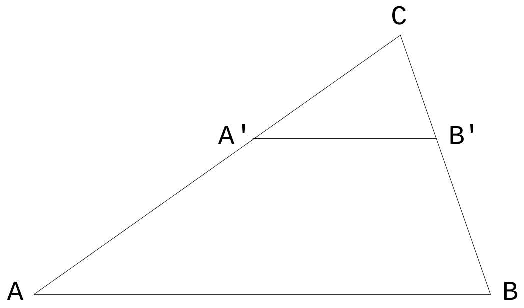


och TS ger

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB}$$
varav $PQ = B_1C_1$

Alltså: $\triangle APQ$ har parvis lika långa sidor som $\triangle A_1B_1C_1$.
Därmed är dessa två kongruenta enl. SSS-fallet
och motsvarande vinklar är lika. V.S.B.

Likformighetsfallen $\Longrightarrow$ transversalsatsen



$$
\begin{array}{rcl}
A'B' \| AB & \Longrightarrow & A'B'C \sim ABC \\
& & \text{enl. tredje likf.fallet}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\Longrightarrow & \dfrac{AC}{A'C} = \dfrac{BC}{B'C} \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{AA' + A'C}{A'C} = \dfrac{BB' + B'C}{B'C} \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{AA'}{A'C} + 1 = \dfrac{BB'}{B'C} + 1 \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{AA'}{A'C} = \dfrac{BB'}{B'C}
\end{array}
$$

Likformighetsfallen $\Longrightarrow$
transversalsatsens omvändning

Enl. närmast ovanstående räkning

$$\frac{AA'}{A'C} = \frac{BB'}{B'C} \Longrightarrow \frac{AC}{A'C} = \frac{BC}{B'C}$$

Sedan observera att

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{AC}{A'C} & = & \dfrac{BC}{B'C} \Longrightarrow A'B'C \sim ABC \\
& & \text{enl. första likf.fallet}
\end{array}
$$

vilket ger

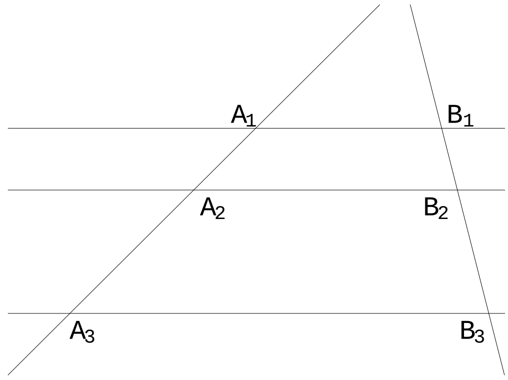
$$\angle CA'B' = \angle CAB$$

som i sin tur säger oss att

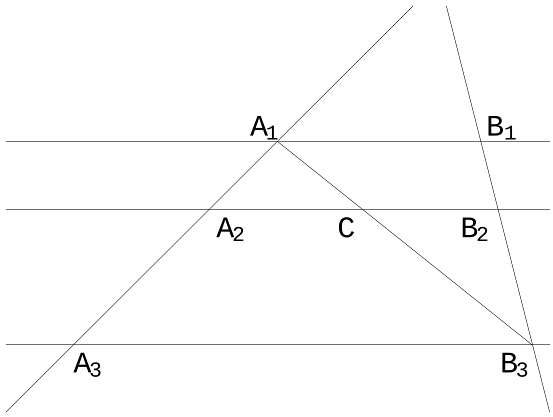
$$A'B' \| AB$$

Likformighetsfallen $\Longrightarrow$
parallellprojektionssatsen

Vi betraktar alltså den här situationen:



Antag att de horisontella linjerna är parallella.
Dra en extra hjälplinje A_1B_3 :



Tredje likformighetsfallet ger att

$$
\begin{array}{rcl}
\triangle A_1A_2C & \sim & \triangle A_1A_3B_3 \\
\triangle B_3B_2C & \sim & \triangle B_3B_1A_1
\end{array}
$$

Därför

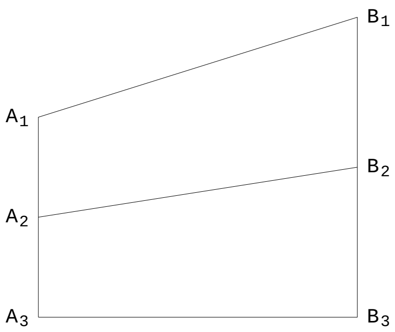
$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{A_1A_2}{A_1A_3} & = & \dfrac{A_1C}{A_1B_3} = 1 - \dfrac{CB_3}{A_1B_3} = \\
& = & 1 - \dfrac{B_2B_3}{B_1B_3} = \\
& = & \dfrac{B_1B_2}{B_1B_3}
\end{array}
$$

Likformighetsfallen $\Longrightarrow$
en "partiell" omvändning
till parallellprojektionssatsen

- Obs. att omvändningen till parallellproj.satsen

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3} \Longrightarrow A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3$$

inte är sann :



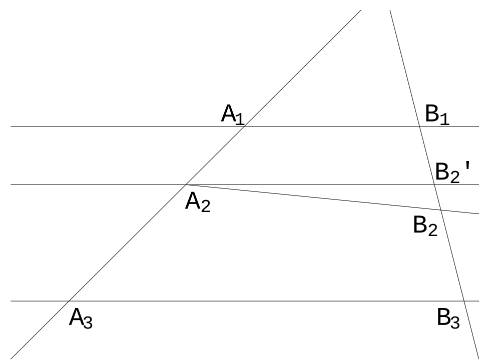
$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = 1 = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$$

men A_1B_1, A_2B_2 och A_3B_3
är inte parallella för det!

- Om man emellertid lägger till som förutsättning att två av linjerna är parallella, s
å kan man få ett sant påstående :

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3} \text{ och } A_1B_1 \| A_3B_3 \Longrightarrow A_2B_2 \| A_1B_1$$

(Anm. Om $A_1 = B_1$ eller $A_3 = B_3$,
så säger vi också att $A_1B_1 \| A_3B_3$.)
Genom A_2 dra en parallell A_2B_2' till A_1B_1 och A_3B_3.



Denna vet vi, enl. TS,
skär B_1B_3 i en punkt B_2', sådan att

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2'}{B_2'B_3}$$

Om vår givna punkt B_2 låge under B_2',
som i figuren, skulle

$$\frac{B_1B_2}{B_2B_3} > \frac{B_1B_2'}{B_2'B_3} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3}$$

annars tvärtom – mindre. Att

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$$

betyder att B_2 måste sammanfalla med B_2'.

Area

Ett huvudsyfte med det här studiematerialet är att visa att geometri är *mycket mer* än det grundläggande area- och volymräknande som den svenska skolan koncentrerar sig på, och som läsaren är förtrogen med vid det här laget. Så vi ägnar minimal tid åt area-/volymbegreppens grunder och går raskt på intressanta problemställningar.

- Ev. med stöd i någon skollärobok eller t.ex. [Häggmark, kap.14], tänk igenom och se till att du behärskar härledningarna av formlerna för arean av de enklaste månghörningarna:

  rektangel
  parallellogram
  triangel
  parallelltrapets

- Längd/area/volym är mått på en-/två-/tredimensionella figurers storlek. Dessa mått har tre grundläggande egenskaper, som sedan alla formelhärledningar bygger på :

  i) Kongruenta figurer har samma längd/area/volym.

  ii) Om man delar en kurva/yta/kropp i bitar, så kan vi få dess längd/area/volym som summan av bitarnas längder/areor/volymer. Längd/area/volym är s.k. *additiva* mått, till skillnad mot t.ex. temperatur och densitet.

  iii) En utvald sträcka, s.k. enhetssträcka, åsätts längden 1. En kvadrat, med enhetssträckan som sida, åsätts arean 1. En kub, med enhetssträckan som kant, åsätts volymen 1.

- I area-/volymuträkningar önskar man sig ibland ett förkortat skrivsätt för "arean av triangeln ABC", "volymen av pyramiden $ABCD$", etc. Tyvärr finns det inte något allmänt vedertaget. Ett hemmagjort förslag, som tar fasta på att area och volym är "syskon" till längdbegreppet :

$$\begin{aligned}|AB| &= \text{längden av sträckan } AB\\ |ABC| &= \text{arean av triangeln } ABC\\ |ABCD| &= \text{arean av fyrhörningen } ABCD\\ &\ \text{alt. volymen av tetraedern } ABCD\\ &\ \ldots\end{aligned}$$

103. Låt CC' vara median i triangeln ABC, d.v.s. C' är mittpunkt på sidan AB. Förklara varför de två deltrianglar ACC' och BCC', som medianen delar ABC i, har lika stor area.

104. För trianglarna ABC och DEF gäller

$$\begin{aligned}AB &= DE\\ AC &= DF\\ \angle A + \angle D &= \pi\end{aligned}$$

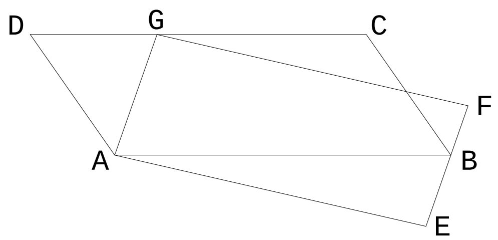
Förklara varför trianglarna har lika stora areor.

105. Förklara varför de fyra trianglar, som en parallellogram delas i av sina diagonaler, har lika stora areor.

"Dynamiska bevis"

Ibland kan det vara bekvämt att tänka sig
en kontinuerlig deformation av ens figur :

- $ABCD$ och $AEFG$ är parallellogrammer,
  B ligger på EF och G ligger på CD.
  Vi visar att de har lika stor area.



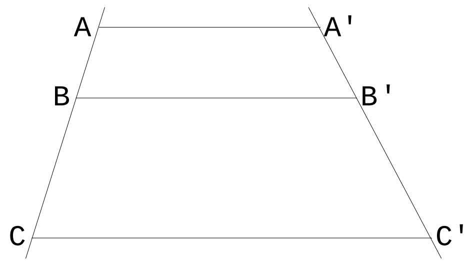
(Tänk dig parallellogrammerna
uppbyggda av länkade pinnar.)
Förflytta EF parallellt med AG –
håll därvid AG fix –
tills E sammanfaller med B.
Förflytta sedan FG parallellt med AB –
håll därvid $AE = AB$ fix –
tills F sammanfaller med C.
Observera att dessa deformationer
ger parallellogrammer med lika areor :
Betrakta den fixa sidan som bas.
I och med att den motstående sidan
förflyttas längs en parallell linje,
så är höjdens längd också konstant.

106. (Forts.) Konstruera ett mer traditionellt,
"icke-dynamiskt" bevis.
Vilket av de två bevisen var enklast?

Arearesonemang i problem som inte handlar om area

Man kan mycket väl ha glädje av arearesonemang
även i problem som inte handlar om area:

- Parallellprojektionssatsen igen :



$$AA' \| BB' \| CC' \Longrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

(A', B', C' är bilderna av A, B resp. C
under projektion parallellt med
den riktning som linjerna AA', BB', CC' har.)

Följande är faktiskt ett kortfattat tecknat bevis:
(absolutbeloppen här står för area!)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{|AB'B|}{|BB'C|} = \frac{|A'BB'|}{|BB'C'|} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Tänk igenom varför likheterna gäller!

Area och likformighet

107. Motivera, m.h.a. lämpliga likformighetsfall, varför, om två trianglar, $A'B'C'$ och ABC, är likformiga, i den meningen att

$$\measuredangle A' = \measuredangle A$$
$$\measuredangle B' = \measuredangle B$$
$$\measuredangle C' = \measuredangle C$$
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$$

så är

$$\frac{\text{arean av } A'B'C}{\text{arean av } ABC} = k^2$$

108. Hur inser man att

$$\frac{\text{bildens area}}{\text{föremålets area}} = k^2$$

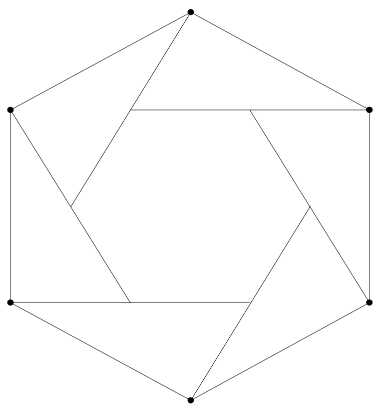
d.v.s.

$$\text{areaskalan } = (\text{längdskalan})^2$$

även för andra likformiga figurer än trianglar?

109. En regelbunden sexhörning och en liksidig triangel har lika stor omkrets. Vad är förhållandet mellan deras areor ?

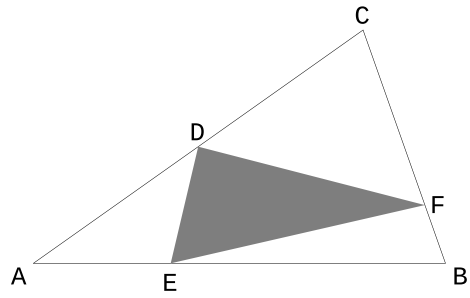
110. I en regelbunden sexhörning drar man från varje hörn normaler inåt som i figuren. Inuti bildas då en ny, mindre, regelbunden månghörning. Hur stor del utgör dess area av den stora sexhörningens area?



111. (Variant av föregående)
Varje sida i en regelbunden sexhörning förlängs medurs till sin dubbla längd. De nya ändpunkterna förbinds sedan, så att man får en ny regelbunden sexhörning. Beräkna areaförhållandet.

112. I en liksidig triangel är inskriven en annan liksidig triangel med ett hörn på varje sida i den förstnämnda. Varje sida i den ena triangeln är vinkelrät mot en sida i den andra. Beräkna förhållandet mellan trianglarnas areor.

113. D är mittpunkt på AC,
E delar AB i förhållandet $1 : 2$ och
F delar BC i förhållandet $1 : 3$.

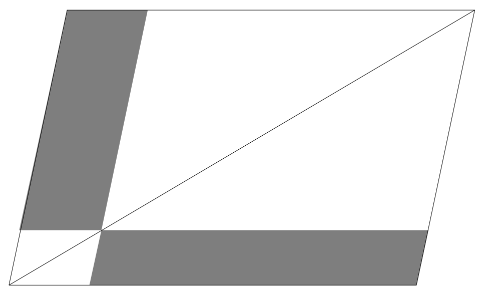


Hur stor del av $\triangle ABC$ utgör $\triangle DEF$, d.v.s. beräkna förhållandet

$$\frac{\text{arean av } DEF}{\text{arean av } ABC}$$

114. En triangel ABC är given. Punkterna A_1, B_1 och C_1 ligger på sidorna BC, CA resp. AB och delar dessa i förhållandet $1 : 3$, d.v.s. $BA_1/A_1C = 1/3$, etc. Hur stor del av ABC utgör $A_1B_1C_1$?

115. Från en godtycklig punkt på diagonalen i en parallellogram dras linjer parallella med parallellogrammens sidor. Visa att de streckade områdena har lika stora areor.

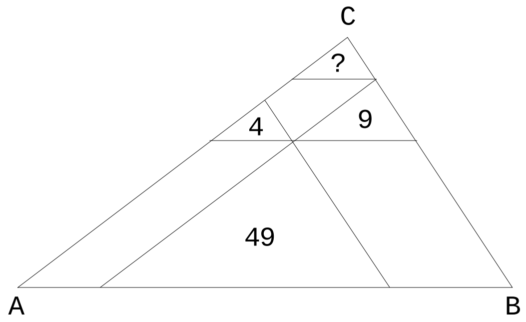


116. I en triangel ABC avskäres på sidan AB ett stycke $AD = \frac{1}{4}AB$ och på sidan BC ett stycke $BE = \frac{2}{3}BC$. Vad är areaförhållandet

(a) $|BDE| \,/\, |ABE|$?

(b) $|ABE| \,/\, |ABC|$?

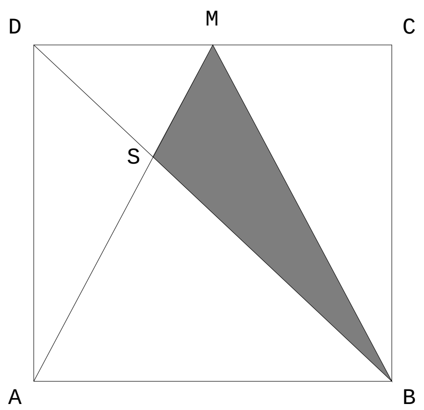
117. I figuren är tre deltrianglars areor angivna. Alla linjer som synes parallella, är det också. Beräkna areorna av hela $\triangle ABC$ samt topptriangeln med frågetecken.



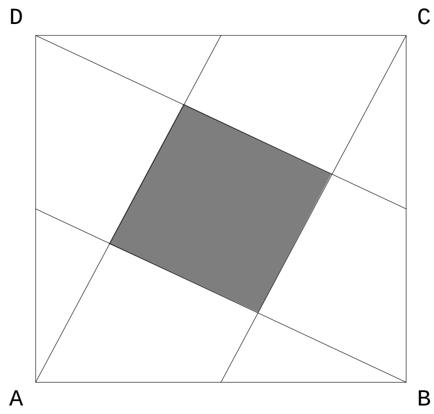
118. Genom en godtyckligt vald punkt inuti en triangel med arean T dras linjer parallella med triangelns sidor. Därvid uppdelas triangeln i sex områden, varav tre trianglar. Dessa deltrianglars areor betecknas U, V, W. Visa att

$$T = \left(\sqrt{U} + \sqrt{V} + \sqrt{W}\right)^2$$

119. Hur stor del av kvadraten $ABCD$:s area utgör den skuggade triangeln ? M är mittpunkt på CD

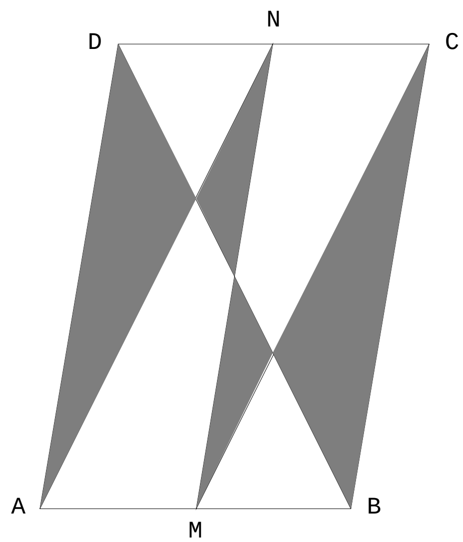


120. I en kvadrat sammanbinds hörnen med mittpunkter på motstående sidor på följande sätt:



Hur stor del av kvadraten upptar det skuggade området i mitten ?

121. Låt $ABCD$ vara en parallellogram med M och N mittpunkter på AB resp. CD. Dra sträckorna BD, AN, NM och MC.



Hur stor del av parallellogrammens area utgör det skuggade området ?

Likformighet: blandade problem

Varignons[32] parallellogram

122. Rita en fyrhörning $ABCD$.
Låt P, Q, R och S vara mittpunkterna
på sidorna AB, BC, CD resp. DA.
Betrakta fyrhörningen $PQRS$.
Ser den inte ut som en parallellogram?
Måste den vara en parallellogram?

123. Håller dina resonemang och slutsats ovan

    (a) om $ABCD$ är en "fyrhörning" vars sidor korsar varandra?

    (b) om punkterna A, B, C och D *inte* ligger i samma plan ?

124. Under vilka omständigheter blir $PQRS$ en kvadrat?

125. Hur stor area har $PQRS$ i förhållande till $ABCD$?

126. Kan $ABCD$ rekonstrueras utifrån $PQRS$?

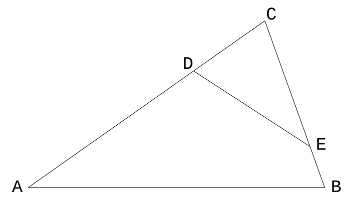
127. En sträcka som förbinder mittpunkterna
på två motstående sidor i en fyrhörning
kallas (ibland) för **bimedian**.
Visa att de två bimedianerna
i en godtycklig fyrhörning skär varandra i mitten.

128. Visa att bimedianernas skärningspunkt ligger
mitt på sträckan mellan diagonalernas mittpunkter.

129. Är (vissa av) ovanstående resultat
kanske enklare att inse m.h.a. vektorräkning?

[32] Pierre Varignon (1654-1722) – inte någon av de stora och berömda, men lär ha varit en av de första i Frankrike att inse värdet av och tillämpa Newtons och Leibniz differentialkalkyl och valdes in i såväl franska, tyska (Berlins) som brittiska vetenskapsakademin.

130. I triangeln ABC är D en punkt på AC
och E en punkt på BC så att $\measuredangle CDE = \measuredangle ABC$.
Vilka slutsatser kan man dra?



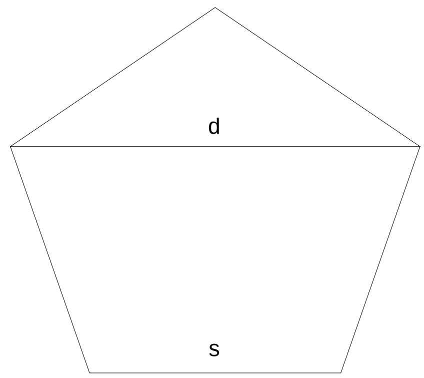
131. I gymnasiets formelsamlingar står det att
två räta linjer med riktn.koeff. k_1 resp. k_2
är vinkelräta då och endast då $k_1 \cdot k_2 = -1$,
men hur kommer man fram till det sambandet?

132. Vi har sett att de fyrhörningar
vars diagonaler skär varandra i mitten
är precis parallellogrammerna.
Hur kan man alternativt karaktärisera
fyrhörningar vars diagonaler
delar varandra i samma förhållande?

133. En kvadrat med sidan s är inskriven i
en triangel med basen b och höjden h.
En av kvadratens sidor faller utmed b.
Visa att
$$\frac{1}{s} = \frac{1}{b} + \frac{1}{h}$$

134. Alla tre vinklarna och två av sidorna i $\triangle ABC$
är lika stora som var sin vinkel/sida i $\triangle KLM$.
Kan detta inträffa
även om trianglarna inte är kongruenta?
Om ja, beskriv exakt för vilka trianglar.

135. Uttryck m.h.a. de fyra räknesätten och
rotutdragningar, *ej trigonometriska funktioner*,
förhållandet mellan diagonal och sida
i en regelbunden femhörning

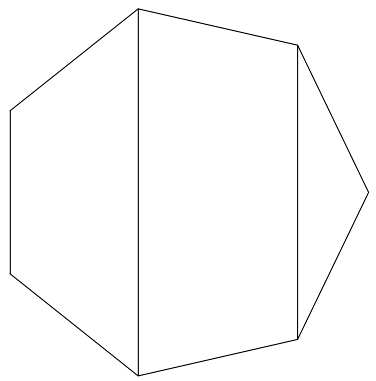


$d/s = ?$

136. För en regelbunden sjuhörning låter vi

$$\begin{aligned} s &= \text{sidornas längd} \\ d &= \text{korta diagonalens längd} \\ D &= \text{långa diagonalens längd} \end{aligned}$$

(Alla diagonaler har längd antingen d eller D!)



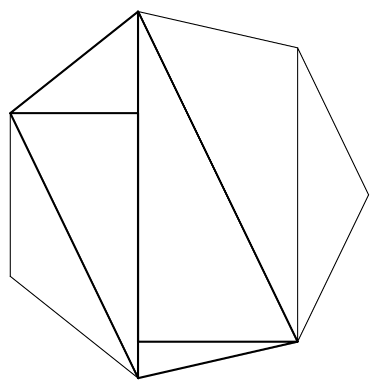
Visa att

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{d} + \frac{1}{D}$$

Flera olika angreppssätt är tänkbara (och genomförbara!):

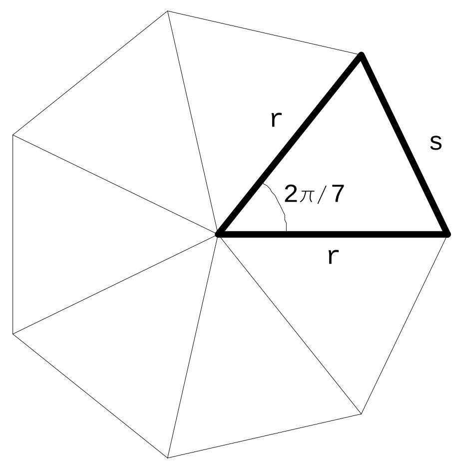
- Den allra kortaste lösningen får man nog genom att, som för femhörningen, dra diagonaler på lämpligt sätt, så att man får likformiga trianglar att räkna på.

- En omständligare, men ändå framkomlig, väg är att räkna på rätvinkliga trianglar, enligt följande figur:



- Nu skulle vi visserligen försöka undvika trigonometri, men hittar man ingen annan lösning, så ...
Det visar sig, dessutom, bli ett mycket intressant och lärorikt trigonometriproblem av det här!

Börja med cosinussatsen på en 1/7-del av 7-hörningen (låt r vara den omskrivna cirkelns radie):



$$\begin{aligned} s^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\frac{2\pi}{7} \\ &= 2r^2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Utnyttja nu formlerna för dubbla vinkeln

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \\ \text{ger } 1 - \cos 2x &= 2\sin^2 x \end{aligned}$$

så kan vi slippa rottecken:

$$\begin{aligned} s^2 &= 2r^2 \cdot 2\sin^2\frac{\pi}{7} \\ s &= 2r\sin\frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

På samma sätt får vi

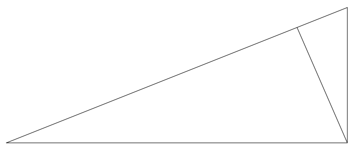
$$\begin{aligned} d &= 2r\sin\frac{2\pi}{7} \\ D &= 2r\sin\frac{3\pi}{7} \end{aligned}$$

Därmed kommer vi fram till att den påstådda likheten är ekvivalent med den vackra trigonometriska likheten

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$$

Det är nu en lagom utmaning att verifiera denna m.h.a. trigonometriska omskrivningar !

137. De två deltrianglar, som fås när man drar höjden mot hypotenusan i en rätvinklig triangel, är likformiga med den ursprungliga triangeln och därmed likformiga sinsemellan.

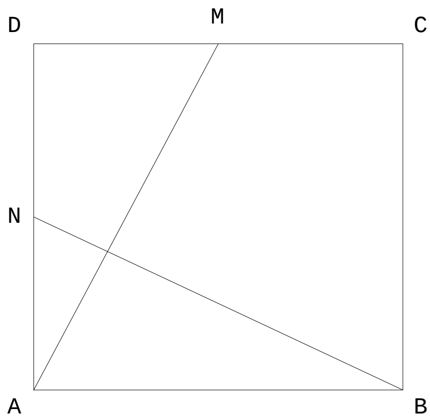


138. Sammanbind mittpunkterna på sidorna i en godtycklig triangel. Visa att den då delas in i fyra kongruenta deltrianglar, som alla är likformiga med den stora.

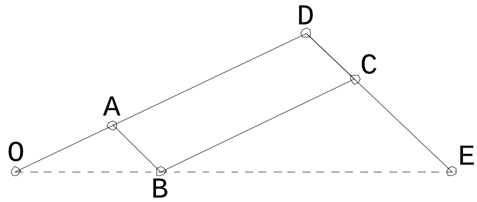
139. I en triangel ABC dras medianen CM. Genom en punkt P på medianen, vilken som helst, dras linjer parallella med sidorna AC resp. BC. Visa att dessa linjer delar AB i fyra delar som är parvis lika långa.

140. Låt ABC och $A'B'C'$ vara två likformiga, dock inte kongruenta, trianglar, som ligger i planet så att AB, BC, CA är parallella med $A'B'$, $B'C'$ resp. $C'A'$. Visa att linjerna AA', BB' och CC' skär varandra i en punkt.

141. I vilka förhållanden delar AM och BN varandra då $ABCD$ är en kvadrat och M och N är mittpunkter på resp. sida ?



142. En s.k. *pantograf* är en anordning med vars hjälp man kan förstora/förminska figurer. I sin enklaste form består den av fyra pinnar, AB, BC, OD och DE, länkade så att



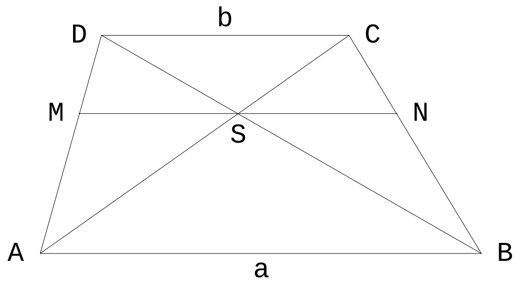
$ABCD$ är en parallellogram och punkterna O, B och E ligger på rät linje. Man fixerar O på pappret med den figur F man vill förstora/förminska och låter B alt. E följa kurvorna som F består utav. Då kommer E resp. B att följa kurvor, som är förstorade / förminskade kopior av de förstnämnda. Genom att fästa en penna i B alt. E, får man alltså en förstorad / förminskad bild av F.

a) Bevisa först att B och E alltid ligger på rät linje, oavsett rådande vinkel mellan pinnarna.

b) Bevisa påståendet om förstoring/förminskning.

c) Säg att vi vill utnyttja pantografen för att förstora med faktorn k. Vilka förhållanden skall råda mellan länkarnas längder ?

143. Uttryck längden $|MN|$ i a och b.

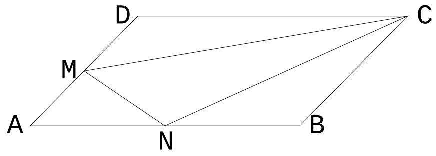


$ABCD$ är ett parallelltrapets, MN är parallell med AB och CD och går genom skärningspunkten mellan AC och BD.

144. I en triangel med sidolängderna $a < b < c$ skärs hörnen av med snitt, som är parallella med motstående sidor, så att man får en *liksidig* sexhörning med sidolängd s (dock inte nödvändigtvis regelbunden!). Visa att

$$\frac{a}{3} < s < \frac{c}{3}$$

145. Låt $ABCD$ vara en parallellogram,
M och N – mittpunkter på AD resp. AB.



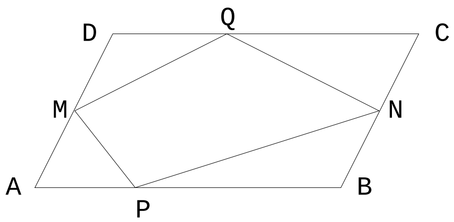
Hur stor del av parallellogrammens area utgörs av triangeln MNC ?

146. Generalisera föregående:
Låt $ABCD$ vara en parallellogram,
M och N – punkter på AD resp. AB, så att

$$\frac{AM}{DM} = s$$
$$\frac{AN}{BN} = t, \quad 0 \le s, t \le 1$$

Hur stor del av parallellogrammens area utgörs av triangeln MNC ?

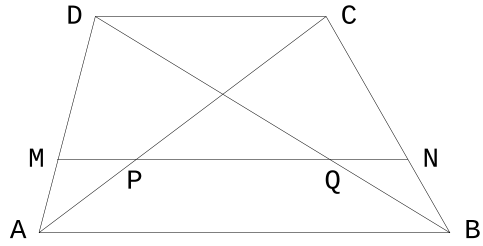
147. I en godtycklig parallellogram $ABCD$ är
M och N mittpunkterna på AD resp. BC,
P och Q – godtyckliga på AB resp. CD.



Hur stor del av parallellogrammen utgör fyrhörningen $MPNQ$?

148. Triangeln ABC är rätvinklig.
På hypotenusan AB avsätts Q så att $AQ = AC$
och på AC väljs P, så att triangeln APQ
och fyrhörningen $PQBC$ har lika stora areor.
Hur lång är PQ i förhållande till hypotenusan AB?

149. Låt $ABCD$ vara ett parallelltrapets, med M och N punkter på benen AD resp. BC,



så att

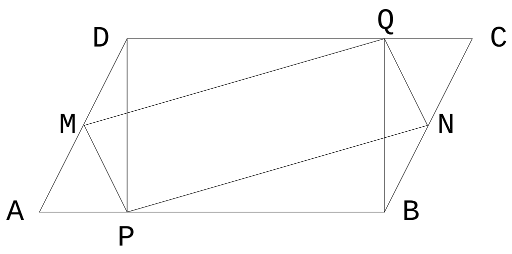
$$AB = a$$
$$CD = b, \quad a > b$$
$$\frac{AM}{DM} = \frac{BN}{CN} = k, \quad 0 < k < 1$$

Uttryck i a, b och k

(a) längden av MN,
(b) längderna av de tre sträckorna som MN delas i av diagonalerna,
(c) hur stor del av trapetset $\triangle AND$ utgör.

Vad fås i specialfallet
då M och N är mittpunkter på resp. ben ?

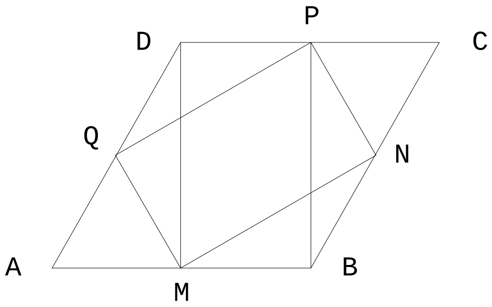
150. I en parallellogram $ABCD$ är M och N mittpunkterna på AD resp. BC, P och Q – fotpunkterna till höjderna från D resp. B.



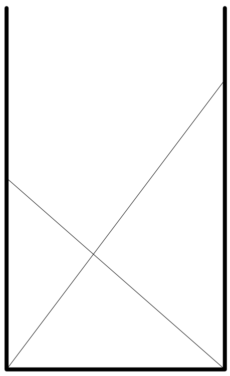
Vilket samband måste råda mellan

$$\frac{AP}{AD} \text{ och } \frac{AD}{AB}$$

för att $MPNQ$ ska vara en rektangel ?



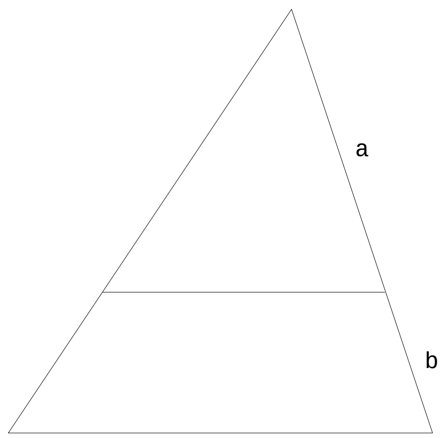
151. Två stegar, 4 m resp. 5 m långa är uppställda mellan två väggar på avståndet 3 m, så att det från sidan ser ut så här:



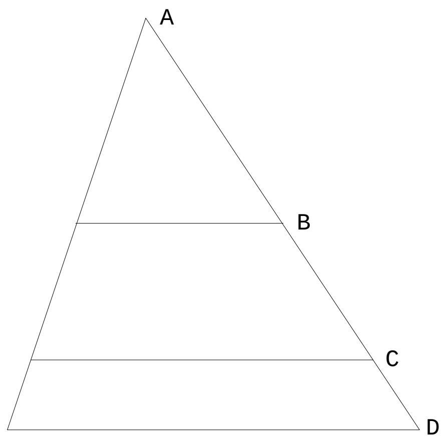
Hur högt över marken korsar de varandra?

152. Generalisera föregående till godtyckliga längder a och b (stegarna) och c (avståndet mellan väggarna).

153. Vad skall förhållandet mellan a och b vara för att areorna av den övre deltriangeln resp. trapetset nedanför skall vara lika stora?



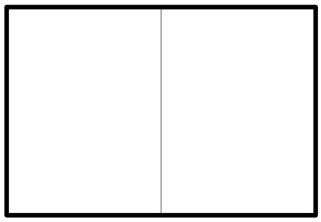
154. Med två linjer parallella med basen skall en triangel delas i tre lika stora delar (d.v.s. med lika stora areor). Hur lång skall AB vara i förhållande till CD ?



155. I de två föregående uppgifterna har en triangel delats in i 2 resp. 3 lika stora delar med hjälp av 1 resp. 2 transversaler. Generalisera nu till en indelning i n delar med hjälp av $n-1$ transversaler !

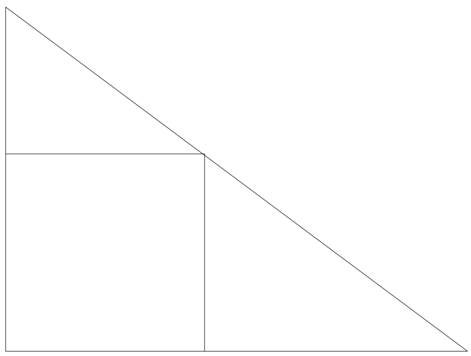
156. I gymnasiets formelsamlingar står det att
två räta linjer med riktn.koeff. k_1 resp. k_2
är vinkelräta då och endast då $k_1 \cdot k_2 = -1$,
men hur kommer man fram till det sambandet?

157. Standard pappersformat (A3-,A4-,A5-ark, etc.) är dimensionerat så att, om man delar ett ark i mitten (av den längre sidan), så fås två rektanglar som är likformiga med den ursprungliga.



Vad måste förhållandet mellan längd och bredd för ett sådant ark papper vara? (Kontrollera dig själv: ett A4-ark är 210 mm $\times$ 297 mm .)

158. I en rätvinklig triangel är en kvadrat inskriven.
(Månghörningen M säges vara
inskriven i månghörningen / cirkeln N,
om M:s alla hörn ligger på N.)
Hur lång är kvadratens sida,
om kateterna har längderna a resp. b ?



Förklara varför formeln för kvadratens sidlängd måste vara symmetrisk i a och b – uttrycket skall inte ändras om man låter a och b byta plats – och kontrollera att så är fallet!

159. I triangeln ABC väljs en punkt P godtyckligt på sidan AB. Genom mittpunkten M på samma sida dras sträckan DM parallellt med CP, med punkten D på någon av de andra sidorna. Visa att sträckan DP delar triangeln i två lika stora områden.

160. Låt ABC vara en triangel,
vars vinklar A och B inte är trubbiga.
Konstruera en kvadrat $PQRS$
med hörn P och Q på sidan AB
samt R och S på BC resp. AC.
(Varje triangel har alltså
en inskriven kvadrat i ovannämnda mening.)

Tips: Inse att det räcker att konstruera
en figur (triangel med inskriven kvadrat)
som är *likformig* med den sökta.

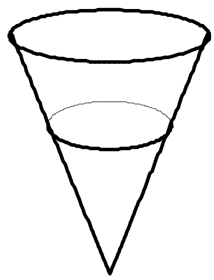
Starta med en (godtycklig) kvadrat
och dra genom hörnen linjer
parallella med den givna triangelns sidor...

161. I en rektangel med sidor a och b, med $b > a$,
dras en diagonal. Från ett hörn
som inte ligger på diagonalen
dras en linje vinkelrät mot diagonalen.
I vilket förhållande
delas sidan med längden b av denna linje?

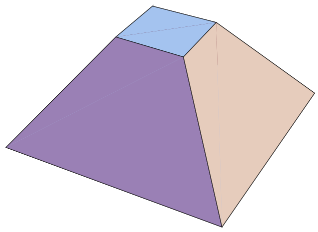
162. Givet en triangel ABC, kan man alltid hitta
en punkt T inuti triangeln, sådan att trianglarna
ABT, BCT och CAT har lika stor area ?

163. Figuren nedan skall föreställa
en konisk vattenbehållare, fylld till en viss nivå.
Ange sambandet som råder mellan

$$x = \frac{\text{vattnets höjd}}{\text{konens höjd}} \quad \text{och} \quad y = \frac{\text{vattnets volym}}{\text{konens volym}}$$



164. Kapar man toppen av en pyramid med ett snitt parallellt med basplanet, fås en kropp som brukar kallas för *stympad (trunkerad) pyramid* :



Antag att basen är en kvadrat. Sätt

$$\begin{aligned} a &= \text{baskvadratens sidlängd} \\ b &= \text{toppkvadratens sidlängd} \\ h &= \text{höjden} \end{aligned}$$

Den stympade pyramidens volym är

$$\frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right) h$$

Hur härleder du denna formel?

Historia: Huvudkällorna till
vår kunskap om egyptisk matematik är
i) Moskvapapyrusen, daterad till ca 1850 f.Kr., som innehåller 25 ”lösta exempel”, och
ii) Rhindpapyrusen, från 1650 f.Kr., innehållande 85 lösta exempel.

Moskvapapyrusen innehåller följande exempel (i väldigt fri översättning):

”Om du får veta: En trunkerad pyramid med höjd 6, sida 4 i basen och sida 2 i toppen. Kvadrera 4, får 16. Multiplicera $4 \cdot 2 = 8$. Kvadrera 2, får 4. Addera $16+8+4 = 28$. En tredjedel av 6 är 2. Tag $28 \cdot 2 = 56$. Då får du rätt resultat.”

Övertyga dig om att
här tillämpas just ovannämnda formel!

Den anses vara det mest avancerade resultatet i fornegyptisk matematik – en så anmärkningsvärd prestation att E.T.Bell[33] kallade den för ”egyptiernas största pyramid”.
Hur de kom fram till den är oklart.

Tips: Volymen är differensen
mellan två vanliga pyramiders volymer.

[33] E.T.Bell (1883-1960), en matematiker med litterär ådra, som skrev fängslande om matematikens historia.

165. Pyramider behöver inte ha kvadratisk bas:
ta vilken månghörning som helst och
dra linjer från hörnen upp mot en och samma punkt någonstans utanför månghörningens plan, så har du ”skelettet” av en pyramid.
En sådan kan nu ”stympas” på samma sätt som i föregående fråga: kapa bort toppen med ett snitt parallellt med basen.
En generalisering av föregående resultat lyder: Beteckna basens och toppytans areor med B_1 resp. B_2.
Låt som ovan h = avståndet mellan dessa ytor.
Då är den stympade pyramidens volym

$$\frac{1}{3}\left(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}\right) h$$

Visa detta!

166. Volymformeln

$$V = \frac{1}{3}\,(\text{basarean}) \cdot (\text{höjden})$$

gäller för såväl pyramider som koner.

(a) Vad har pyramider och koner gemensamt?
Skulle man kunna förvänta sig att
formeln är giltig för ännu fler kroppar?

(b) Att faktorn ovan är just 1/3
kan sägas hänga ihop med att

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Hur så?

167. För en kapad kon/pyramid
använde babylonierna felaktigt formeln

$$V = \frac{1}{2}\,(B + b)\, h$$

där B och b betecknar areorna av
de två parallella sidorna (baserna) och h är höjden.
Ger den för stort eller för litet värde?

168. Uttrycket

$$\frac{a + \sqrt{ab} + b}{3}$$

har ibland kallats det Heronska medelvärdet
av talen a och b (som förutsätts icke-negativa).
Visa att detta verkligen är ett medelvärde
i den meningen att

$$\min(a, b) \le \frac{a + \sqrt{ab} + b}{3} \le \max(a, b)$$

Hur förhåller det sig till de aritmetiska och geometriska medelvärdena (alltid större/mindre eller ingetdera)?