HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047 Algebra och diskret matematik
Torsdagen den 4 januari 2018
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös olikheten (*2p*)

$$x^5 > x^3.$$

(b) Lös ekvationen (*3p*)

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 2x\ .$$

2. (a) Ange talet

$$\left(\frac{i(\sqrt{3}-i)}{1+i}\right)^6$$

på rektangulär form ($a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$). (*2p*)

(b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = (n+1)^2$$

för alla heltal $n \geq 0$. (*3p*)

3. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan nedanstående utsagor där x är ett reellt tal: (*2p*)

$$A : |2x-1| < 1, \qquad B : \sqrt{x} < 1, \qquad C : e^{x-1} < 1.$$

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 1, \\ y_0 = y_1 = 1. \end{cases}$$

4. (a) Polynomet $p(z)$ har reella koefficienter och ett nollställe z_1 med imaginärdel skild från noll. Visa att $p(z)$ också har nollstället $\bar{z}_1$. (*2p*)

(b) Ekvationen

$$z^6 + z^4 + 4z^2 + 4 = 0$$

har en rot i. Lös ekvationen fullständigt. (*3p*)

5. (a) Grafen $G = (V, E)$ är enkel, sammanhängande och varje nod har grad 5. Dessutom gäller det att $|E| = 4|V| - 18$. Bestäm $|V|$ och $|E|$. Är G en Eulergraf? (*2p*)

(b) En biograf sålde en kväll biljetter för 2450 kr. Biljettpriset var 85 kr för vuxna och 65 kr för barn. Hur många biljetter kan totalt högst ha sålts vid detta tillfälle ? (*3p*)

6. (a) Visa att $(a|b \wedge a|c) \Rightarrow a|(xb + yc)$ där x, y är godtyckliga heltal. Gäller också omvändningen? (*1p*)

(b) Skruvingenjören Pelle har en låda som innehåller 13 skruvar varav 4 är defekta. Pelle blundar, stoppar ner handen i lådan och tar upp en näve skruvar. Är sannolikheten större än 50% för att högst 2 är defekta om han har totalt 8 skruvar i handen? (*4p*)

Lycka till!

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) $x^5 > x^3 \Leftrightarrow x^3(x+1)(x-1) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ eller $x > 1$.

   (b) Logaritmlagarna ger: $\ln\left(\dfrac{(x-1)(x+1)}{2x}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{2x} = 1,\ x > 1 \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2}$.

2. (a) Går vi över till polär form får vi

$$\arg z = \arg\left(\frac{i(\sqrt{3}-i)}{1+i}\right)^6 = 6(\arg(i) + \arg(\sqrt{3}-i) - \arg(1+i)) = 6\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$|z| = \left|\left(\frac{i(\sqrt{3}-i)}{1+i}\right)^6\right| = \left(\frac{|i||\sqrt{3}-i|}{|1+i|}\right)^6 = \left(\frac{1\cdot 2}{\sqrt{2}}\right)^6 = 8$$

   dvs $z = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$.

   (b) Visas t ex med induktion eller genom att utnyttja formeln för en aritmetisk summa:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^2.$$

3. (a) Vi har $A : 0 < x < 1$, $B : 0 \le x < 1$ och $C : x < 1$ dvs $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$ och $B \Rightarrow C$.

   (b) $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$. Ansats: $y_{pn} = An$. Insättning ger $A = -1$.
   Allmän lösning: $y_n = C_1 + C_2 2^n - n$. Sökt lösning: $y_n = 2^n - n$.

4. (a) Se föreläsningsanteckningar (Komplexa tal).

   (b) Polynomet i vänsterledet har reella koefficienter och därför är även $-i$ en rot och polynomet har alltså faktorn $(z-i)(z+i) = z^2+1$. Polynomdivision ger $z^6+z^4+4z^2+4 = (z^2+1)(z^4+4)$. Den binomiska ekvationen $z^4 = -4$ löser vi enklast genom att gå över till polär form. Rötterna till den ursprungliga ekvationen är sammanfattningsvis $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4,5,6} = \pm(1 \pm i)$.

5. (a) ”Handskakningslemmat” säger att summan av nodernas grader är lika med 2 gånger antalet bågar vilket ger:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = |V|\cdot 5 = 2|E| = 2(4|V| - 18) \Leftrightarrow |V| = 12,\ |E| = 30.$$

   Enligt Euler-Hierholzers sats innehåller G en Eulercykel om och endast om den är sammanhängande och samtliga noder har jämn grad. G är alltså inte en Eulergraf.

   (b) Med $x =$ antal barn och $y =$ antal vuxna söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

$$65x + 85y = 2450 \Leftrightarrow 13x + 17y = 490.$$

   Vi får $(x, y) = (5, 25)$ respektive $(x, y) = (22, 12)$ och det maximala antalet sålda biljetter är alltså $(x + y)_{\max} = 22 + 12 = 34$.

6. (a) Om $a|b$ och $a|c$ finns det heltal m och n sådana att $b = am$ och $c = an$. Vi får därför

$$xb + yc = xam + yan = a(xm + yn) \Leftrightarrow a|(xb + yc).$$

   Omvändningen gäller inte eftersom t ex $3|30 = (5\cdot 2 + 2\cdot 10)$.

   (b) Totala antalet sätt att välja ut 8 skruvar bland 13 är

$$\binom{13}{8} = \binom{13}{5} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 13\cdot 11\cdot 9 = 1287.$$

   Antalet sätt att välja totalt 8 med högst två bland de 4 defekta och de resterande bland de 9 icke-defekta är

$$\binom{4}{0}\binom{9}{8} + \binom{4}{1}\binom{9}{7} + \binom{4}{2}\binom{9}{6} = \binom{4}{0}\binom{9}{1} + \binom{4}{1}\binom{9}{2} + \binom{4}{2}\binom{9}{3}$$
$$= 1\cdot 9 + 4\cdot\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} + \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 9 + 4\cdot 9\cdot 4 + 9\cdot 8\cdot 7 = 657.$$

   Sannolikheten för att högst två är defekta är därför

$$\frac{657}{1287} > \frac{650}{1300} = 0.5.$$

   dvs större än 50%.