HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047 Algebra och diskret matematik 6 hp
Torsdagen den 1 november 2018
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös olikheten (*2p*)

$$\frac{x^3+x^2}{x-1} \leq x\,.$$

(b) Lös ekvationen (*3p*)

$$4\sin^3 x = \sin x.$$

2. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*2p*)

$$A:\ |x-3|+1 \geq x, \qquad B:\ x^2 < 4, \qquad C:\ e^{x-2} < 1.$$

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{n+1}, \\ y_0 = -1,\ y_1 = 1. \end{cases}$$

3. (a) Hur många olika ”ord” med 12 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTEAPPARAT”

om varje bokstav ska användas en gång och om:
1) alla ord ska börja med med ”MATA” ?
2) orden inte får börja med ”MATA” och sluta med ”APA” dvs ord av typen ”{MATA}PRETT{APA}” ska inte räknas med? (*2p*)

(b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n}(4k+1) = 1+5+9+13+\cdots+4n+1 = (n+1)(2n+1)$$

för alla heltal $n \geq 0$. (*3p*)

4. (a) Polynomet $p(z)$ har reella koefficienter och ett nollställe z_1 med imaginärdel skild från noll. Visa att $p(z)$ också har nollstället $\bar{z}_1$. (*2p*)

(b) Ekvationen

$$z^5 + z^3 + 8z^2 + 8 = 0$$

har roten i. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. (*3p*)

5. (a) Grafen G är sammanhängande och har 14 bågar. Fem av noderna har grad 2 och tre av noderna har grad 4. De resterande noderna är fler än 2 men färre än 6 och har alla samma grad. Innehåller G en Eulercykel? (*2p*)

(b) I början av 80-talet skulle elektroingenjören Kajsa bygga en helt egen dator och en dag var hon på stan och handlade komponenter i elektronikaffären. Hon köpte transistorer och resistorer för totalt 44 kr. Transistorerna kostade 3.80 kr/st och resistorerna 1.40 kr/st. Hur många komponenter kan hon högst köpt? (*3p*)

6. Ingenjörsstudenten Sara är sur på sin elake mattelärare Kalle och har bestämt sig för att försöka lura av honom lite pengar. Sara vet att Kalle inte är så bra på sannolikhetslära och hon har därför funderat ut en tävling som går till så här: Sara har 10 röda och 10 svarta kulor och hon lägger samtliga kulor i två likadana burkar. Hon berättar förstås inte hur hon fördelar kulorna mellan burkarna. Kalle får sedan välja en av burkarna och utan att titta plocka upp en kula från den. Om kulan är röd vinner Sara 100 kr av Kalle och om kulan är svart eller om burken är tom måste Sara betala 100 kr till Kalle.

(a) Vad är sannolikheten för att Sara vinner om hon placerar alla kulorna i en burk? (*1p*)

(b) Hur ska Sara fördela kulorna mellan burkarna för att optimera sina chanser att vinna? (*4p*)

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Vi samlar alla termer på vänster sida om olikhetstecknet, gör liknämnigt, faktoriserar och gör teckenstudium:

$$\frac{x^3+x^2}{x-1}-x=\frac{x^3+x^2-x(x-1)}{x-1}=\frac{x^3+x}{x-1}=\frac{x(x^2+1)}{x-1}\le 0.$$

($x^2+1>0$ påverkar inte tecknet och behöver inte tas med i teckenstudiet.)

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & 1 & \\ \hline x & - & 0 & + & + & + \\ x-1 & - & - & - & 0 & + \\ \dfrac{x(x^2+1)}{x-1} & + & 0 & - & * & + \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3+x^2}{x-1}\le x \Leftrightarrow 0\le x<1.$$

(b) Faktorisering ger direkt

$$4\sin^3 x=\sin x \Leftrightarrow \sin x(4\sin^2 x-1)=\sin x(2\sin x+1)(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \text{ eller } \sin x=\pm\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=n\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{6}+n2\pi \text{ eller } x=\pm\frac{5\pi}{6}+n2\pi.$$

2. (a) Vi har

$$A:|x-3|=\begin{cases} x-3,\ x\ge 3 \\ -(x-3)=3-x,\ x<3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c|c} x & & 3 \\ \hline & |x-3|+1\ge x & |x-3|+1\ge x \\ & \Leftrightarrow 3-x+1\ge x & \Leftrightarrow x-3+1\ge x \\ & \Leftrightarrow x\le 2 & \Leftrightarrow 2\le 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x\le 2, \\ &B: x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2, \\ &C: e^{x-2}<1 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2, \end{aligned}$$

och inser att de implikationer som gäller är: $B\Rightarrow A,\ B\Rightarrow C$ och $C\Rightarrow A$.

(b) Den allmänna lösningen till den linjära differensekvationen

$$\mathcal{L}(y_n)=y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n=2^{n+1} \tag{1}$$

ges av $y_n=y_{hn}+y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation $\mathcal{L}(y_n)=0$ och y_{pn} *en* partikulärlösning till (1).

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2-3r+2=0$ är $r_1=1$ och $r_2=2$ vilket ger

$$y_{hn}=C_1+C_2 2^n.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
Eftersom y_{hn} innehåller termen $C_2 2^n$ fungerar inte standardansatsen $A2^n$ och vi gör därför istället ansatsen $y_{pn}=An2^n$ och insättning ger:

$$\begin{aligned} y_{n+2}-3y_{n+1}+4y_n &= A(n+2)2^{n+2}-3A(n+1)2^{n+1}+2An2^n \\ &= A2^n((4-6+2)n+8-6)=2A2^n=2^{n+1} \Leftrightarrow A=1. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n=y_{hn}+y_{pn}=C_1+C_2 2^n+n2^n.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1+C_2 2^0+0=C_1+C_2=-1 \Leftrightarrow C_1=-C_2-1, \\ y_1 &= C_1+C_2 2^1+2=-C_2-1+2C_2+2=C_2+1=1 \Leftrightarrow C_2=0. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är därför

$$y_n=n2^n-1.$$

3. (a) 1) Om alla ord ska inledas med ”MATA” kan vi plocka bort dessa bokstäver och vi har då bara kvar bokstäverna i ”TEPPARAT”. Om dessa åtta bokstäver varit olika hade vi kunnat bilda 8! olika ord men eftersom vi har två T:n, två P:n och två A:n och dessa kan permuteras på vardera 2! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi totalt $\frac{8!}{2!2!2!} = 5040$ olika ord.

2) Vi räknar först ut hur många ord som börjar med ”MATA” och slutar med ”APA”. Enligt samma resonemang som i (1) kan vi plocka bokstäverna i dessa ord och vi söker alltså antalet ord som kan bildas med hjälp av de återstående fem bokstäverna P,R,E,T,T. Eftersom vi har två T:n som kan permuteras på 2! sätt utan att ett ord ändras får vi totalt $\frac{5!}{2!}$ olika ord. Antalet ord som *inte* inte börjar med ”MATA” och slutar med ”APA” är därför lika med totala antalet ord vi kan bilda med hjälp av de 12 bokstäverna i ”MATTEAPPARAT” minus $\frac{5!}{2!}$. Eftersom vi har fyra A:n, tre T:n, och två P:n i ursprungsordet, vilka kan permuteras på 4!, 3! respektive 2! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi:

$$\frac{12!}{4!3!2!} - \frac{5!}{2!} = 1663140 \quad \text{olika ord.}$$

(b) Här kan vi förstås göra att induktionsbevis men med omskrivningen

$$\sum_{k=0}^{n}(4k+1) = 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 4S + n + 1$$

ser vi att S är en aritmetisk summa. Multiplicerar vi S med 2 och ändrar summationsordningen får vi:

$$\begin{aligned} 2S &= 1 + 2 + 3 + \cdots n + 1 + 2 + 3 + \cdots n \\ &= \underbrace{(1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ parenteser där summan i varje parentes är } n+1} = n(n+1) \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

dvs

$$\sum_{k=0}^{n}(4k+1) = 4\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (2n+1)(n+1).$$

4. (a) Se föreläsningsanteckningarna (Komplexa tal) eller Månsson & Nordbeck, Endimensionell analys, s. 103.

(b) Polynomet i vänsterledet har reella koefficienter och därför är även $-i$ en rot. Enligt Faktorsatsen har polynomet därför faktorn $(z-i)(z+i) = z^2+1$. Polynomdivision ger $z^5+z^3+8z^2+8 = (z^2+1)(z^3+8)$. Den binomiska ekvationen $x^3 = -8$ löser vi enklast genom att går över till polär form:

$$z^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3e^{i3\theta} = -8 = 8e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \pi + k\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rötterna till ekvationen $z^3 = -8$ ges därför av $z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2$, dvs

$$\begin{cases} z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3}, \\ z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2, \\ z_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

Sammanfattningsvis är rötterna $z = \pm i$, $z = -2$ eller $z = 1 \pm i\sqrt{3}$.

5. (a) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av nodernas gradtal lika med 2 gånger antalet bågar. Om resterande antal noder är n och samtliga av dessa har grad g får vi därför

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 5\cdot 2 + 3\cdot 4 + n\cdot g = 2\cdot 14 \Leftrightarrow ng = 6.$$

Eftersom $2 < n < 6$ är den enda möjligheten att $(n, g) = (3, 2)$. Enligt Euler-Hierholzers sats innehåller G en Eulercykel eftersom den är sammanhängande och samtliga noder har jämn grad.

(b) Sätter vi t = antal transistorer och r = antal resistorer får vi

$$3.8t + 1.4r = 44.$$

Vi söker alltså de icke-negativa heltalslösningarna till den diofantiska ekvationen

$$38t + 14r = 440 \Leftrightarrow 19t + 7r = 220.$$

Eftersom $\text{sgd}(19, 7) = 1|220$ har ekvationen heltalslösning och den allmänna lösningen ges av

$$(t, r) = (220t_0 - 7n, 220r_0 + 19n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

där (t_0, r_0) är en lösning till hjälpekvationen $19t + 7r = 1$. Eftersom $\text{sgd}(19, 7) = 1$ kan vi hitta en sådan med hjälp av Euklides algoritm:

$$\left.\begin{aligned} 19 &= 2 \cdot 7 + 5 \\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2 = 19 - 2 \cdot 7 - 2(7 - 5) = 19 - 2 \cdot 7 - 2(7 - (19 - 2 \cdot 7))$$
$$= 19 \cdot 3 + 7 \cdot (-8).$$

Vi kan alltså välja $(t_0, r_0) = (3, -8)$ och den allmänna lösningen ges nu av:

$$(t, r) = (660 - 7n, -1760 + 19n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De icke-negativa heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{aligned} t \geq 0 \Leftrightarrow 660 - 7n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{660}{7} = 94.28\ldots \\ r \geq 0 \Leftrightarrow -1760 + 19n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{1760}{19} = 92.63\ldots \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow n = 93 \text{ eller } n = 94.$$

$n = 93$ ger $(t, r) = (9, 7)$ medan $n = 94$ ger $(t, r) = (2, 26)$. Kajsa kan alltså högst ha köpt 28 komponenter.

6. (a) Om Sara lägger alla 20 kulorna i en burk är sannolikheten för att Kalle väljer burken med kulor $\frac{1}{2}$. Eftersom det finns lika många svarta som röda kulor i burken är sannolikheten för att han sedan väljer en röd kula också $\frac{1}{2}$. Enligt multiplikationsprincipen är därför sannolikheten för att Sara vinner $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25\%$.

(b) Fallet med alla kulorna i samma burk är redan avklarat. Om r och s är antalet röda respektive svarta kulor i den ena burken och det ligger minst en kula i varje burk är $1 \leq x = r + s \leq 19$. Sannolikheten för att Kalle väljer en röd kula är då enligt samma resonemang som i (a):

$$\frac{1}{2}\frac{r}{r+s} + \frac{1}{2}\frac{10-r}{10-r+10-s} = \frac{15r + 5s - r^2 - rs}{(r+s)(20-r-s)} = \frac{(5-r)x + 10r}{x(20-x)} = \frac{(5-r)x + 10r}{100 - (x-10)^2}$$

Fallen $r = 0$ resp $r = 10$ ger som högst sannolikheten $\frac{1}{2}\frac{10}{11} < 50\%$ för vinst. För $1 \leq r \leq 9$ är täljaren i uttrycket till höger för varje värde på r en rät linje vars värde varierar mellan 14 och 56 för $1 \leq x \leq r + 10$ medan nämnaren är ett andragradspolynom vars värde varierar mellan 19 ($x = 1$ eller $x = 19$) och 100 ($x = 10$). Eftersom $\frac{14}{19} > \frac{56}{100}$ är hela uttrycket därför störst då nämnaren är minst. Sannolikheten för vinst blir då

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\frac{9}{19} = \frac{14}{19} \approx 74\%.$$

vilket definitivt är större än 25% som var resultatet om hon lade alla kulorna i en burk. Sara ska alltså lägga en röd kula i den ena burken och resten av kulorna i den andra för att optimera sina chanser att vinna.