HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047 Algebra och diskret matematik 6 hp
Torsdagen den 10 januari 2019
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$2^{x+1} + 8^x = 3 \cdot 4^x$$

(b) Lös olikheten (*3p*)

$$|1+x| - |1-x| \leq 2x.$$

2. (a) Hur många olika ”ord” med 12 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTEAPPARAT”

om varje bokstav ska användas en gång och om

1) alla T:n ska stå intill varandra?
2) alla T:n ska stå intill varandra men alla A:n inte får stå intill varandra? (*2p*)

(b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n}(3 \cdot 2^{2k} + 1) = 4 + 13 + 49 + \cdots + 3 \cdot 2^{2n} + 1 = 4^{n+1} + n$$

för alla heltal $n \geq 0$. (*3p*)

3. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*2p*)

$$A: \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} < x, \qquad B: x^2 \leq 1, \qquad C: \ln(1+x) < 0.$$

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2n, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 0. \end{cases}$$

4. (a) Formulera och bevisa Faktorsatsen. (*2p*)

(b) Lös ekvationen

$$z^6 + z^4 + 4z^2 + 4 = 0$$

och ange samtliga rötter på rektangulär form.
Tips: Efter lämplig substitution är en rot lätt att gissa. (*3p*)

5. (a) Relationen $\mathcal{R}$ på $A = \{2, 4, 6, 12, 18, 24\}$ definieras genom $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y$. Verifiera att $\mathcal{R}$ är en partiell ordningsrelation, rita Hassediagram samt ange i förekommande fall största och minsta element. (*2p*)

(b) Pelles födelsedagsdatum ger talet 499, om dagen multipliceras med 31, månaden med 12 och dessa resultat sedan adderas. Vilket datum fyller Pelle år? (*3p*)

6. De tre kompisarna Kalle, Kajsa och Karin har tillsammans köpt 30 ägg som de ska måla enfärgade. Kalle ska måla gröna och lila ägg, Kajsa röda och rosa och Karin blåa och gula. På hur många sätt kan de måla äggen om:

(a) Inga andra villkor finns? (*1p*)

(b) 3 ska vara gröna och minst 5 ska vara röda? (*2p*)

(c) Det ska vara rättvist dvs alla ska måla lika många ägg? (*2p*)

Lycka till!

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Omskrivning ger $2 \cdot 2^x + (2^x)^3 = 3 \cdot (2^x)^2$ dvs en tredjegradsekvation i $t = 2^x$. Svar: $x = 0$ eller $x = 1$.

   (b) Lös olikheten i tre intervall där gränserna är -1 och 1. Svar: $x \geq -1$.

2. (a) i. Betrakta de tre T:na som en bokstav: $\frac{10!}{4!2!}$ olika ord.

   ii. Betrakta även de fyra A:na som en bokstav: $\frac{7!}{2!}$ ord där alla T:n står intill varandra och alla A:n står intill varandra. Differensen $\frac{10!}{4!2!} - \frac{7!}{2!}$ ger det sökta antalet.

   (b) Visas t ex med induktion eller genom att utnyttja formeln för en geometrisk summa:

$$\sum_{k=0}^{n}(3 \cdot 2^{2k} + 1) = 3\sum_{k=0}^{n} 4^k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 3\frac{4^{n+1}-1}{4-1} + n + 1 = 4^{n+1} + n.$$

3. (a) Vi har $A : x < 1$, $B : -1 \leq x \leq 1$ och $C : -1 < x < 0$ dvs $C \Rightarrow A$ och $C \Rightarrow B$.

   (b) $y_{hn} = (C_1 n + C_2)2^n$. Ansats: $y_{pn} = An + B$. Insättning ger $A = 2$, $B = 4$. Allmän lösning: $y_n = (C_1 n + C_2)2^n + 2n + 4$. Sökt lösning: $y_n = 2n + 4 - 3 \cdot 2^n$.

4. (a) Se föreläsningsanteckningar (Polynom).

   (b) Med $t = z^2$ får vi en tredjegradsekvation och gissning ger roten $t = z^2 = -1$ dvs $z = \pm i$. Polynomet i vänsterledet har därför faktorn $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$ och polynomdivision ger $z^6 + z^4 + 4z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^4 + 4)$. Den binomiska ekvationen $z^4 = -4$ löser vi enklast genom att gå över till polär form. Rötterna till den ursprungliga ekvationen är sammanfattningsvis $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4,5,6} = \pm(1 \pm i)$.

5. (a) Se föreläsningsanteckningar (Funktioner och relationer, Ex 12).

   (b) Med $d =$ dag och $m =$ månad söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

$$31d + 12m = 499.$$

   Vi får $(d, m) = (1, 39)$ respektive $(d, m) = (13, 8)$ där bara den sista lösningen ger ett möjligt datum. Pelles födelsedatum är alltså den 13 augusti.

6. (a) Sätter vi $x_1 =$ antalet röda ägg, $x_2 =$ antalet lila ägg osv, söker vi antalet icke-negativa heltalsösningar till

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 30$$

   vilket ges av $\binom{6+30-1}{30} = \binom{35}{30} = \binom{35}{5} = 324632$.

   (b) Om 3 ägg ska målas gröna och minst 5 röda får vi $x_1 = 3$ och $x_3 \geq 5$. Sätter vi $y_3 = x_3 - 5 \Leftrightarrow x_3 = y_3 + 5$ söker vi i det här fallet istället antalet icke-negativa heltalslösningar till

$$3 + x_2 + y_3 + 5 + x_4 + x_5 + x_6 = 30 \Leftrightarrow x_2 + y_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 22$$

   som ges av $\binom{5+22-1}{22} = \binom{26}{22} = \binom{26}{4} = 14950$.

   (c) Kalle har två färger och ska måla 10 ägg. Antalet sätt för honom att måla äggen är därför lika med antalet icke-negativa heltalslösningar till

$$x_1 + x_2 = 10$$

   som är $\binom{2+10-1}{10} = \binom{11}{10} = \binom{11}{1} = 11$. Samma resultat får vi för Kajsa och Karin. Eftersom de målar äggen oberoende av varandra blir enligt multiplikationsprincipen totala antalet sätt att måla de 30 äggen $11^3 = 1331$.