HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047 Algebra och diskret matematik 6 hp
Måndagen den 28 oktober 2019
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$|1-x| - |1+x| = x.$$

(b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*3p*)

$$A: \frac{x^3+x^2+x}{x-1} \leq x, \qquad B: x^2 < 1, \qquad C: \ln(2-x) > 0.$$

2. (a) Hur många olika ”ord” med 12 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTEAPPARAT”

om varje bokstav ska användas en gång och om:
1) alla ord ska börja med ”MATTE”?
2) alla T:n ska stå intill varandra och alla A:n ska stå intill varandra? (*2p*)

(b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n}(2^k - 2k + 1) = 2 + 1 + 1 + 3 + 9 + 23 + \cdots + 2^n - 2n + 1 = 2^{n+1} - n^2$$

för alla heltal $n \geq 0$. (*3p*)

3. (a) Visa att om $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ och $a \equiv b \pmod{n}$ så är $ca \equiv cb \pmod{n}$. (*2p*)

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = n, \\ y_0 = y_1 = 1. \end{cases}$$

4. (a) Skriv talet

$$\frac{i(\sqrt{3}+i)^3}{(1-i)^6}$$

på rektangulär form ($a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$). (*2p*)

(b) Ekvationen

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$$

har roten $-i$. Lös ekvationen fullständigt. (*3p*)

5. (a) Bestäm först $\phi(11)$ och därefter den multiplikativa inversen till 7 modulo $\phi(11)$. (*1p*)

(b) Grafen G är sammanhängande och har 11 bågar. Tre av noderna har grad 4 och tre av noderna har grad 2. Kan man med denna information dra slutsatsen att G är en Eulergraf? (*1p*)

(c) Ett fotbollslag med totalt 38 personer ska åka på träningsläger och bo på hotell under en natt. Hotellet har enkelrum för 400 kr/natt, dubbelrum för 600 kr/natt och trippelrum för 700 kr/natt. Vilket är det maximala antalet enkelrum som kan bokas om totalsumman inte ska överstiga 13200kr? (*3p*)

6. Ingenjörsstudenten Pelle är med i en festkommitté och har fått uppdraget att köpa 24 öl till festen. I affären där han ska handla finns det fyra sorter: Carlsberg, Tuborg, Falcon och Spendrups.

(a) På hur många sätt kan han välja 24 öl? (*1p*)

(b) När Pelle är i affären ringer festledaren Kajsa och säger att Pelle måste köpa minst tre av varje sort. På hur många sätt kan han då välja ut ölen? (*1p*)

(c) När Pelle packar ner ölen i kundvagnen ringer Kajsa igen och säger nu att han istället ska köpa tre Falcon, minst tre Carlsberg och högst fem Tuborg. Antal Spendrups spelar ingen roll. På hur många sätt kan han nu till sist välja ut de 24 ölen? (*3p*)

Svaren ska anges på beräknad form.

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Vi har:

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x, & x \le 1 \\ -(1-x), & x > 1 \end{cases} \qquad |1+x| = \begin{cases} 1+x, & x \ge -1 \\ -(1+x), & x < -1 \end{cases}$$

och vi löser därför ekvationen i tre intervall:

x	-1	1
$\lvert 1-x\rvert - \lvert 1+x\rvert = x$ $\Leftrightarrow 1-x-(-(1+x)) = x$ $\Leftrightarrow x = 2 \leftarrow$ Utanför intervallet!	$\lvert 1-x\rvert - \lvert 1+x\rvert = x$ $\Leftrightarrow 1-x-(1+x) = x$ $\Leftrightarrow x = 0$	$\lvert 1-x\rvert - \lvert 1+x\rvert = x$ $\Leftrightarrow -(1-x)-(1+x) = x$ $\Leftrightarrow x = -2 \leftarrow$ Utanför intervallet!

$$\therefore |1-x| - |1+x| = x \Leftrightarrow x = 0.$$

(b) A : Vi samlar alla termer på vänster sida om olikhetstecknet, gör liknämnigt, faktoriserar och gör teckenstudium:

$$\frac{x^3+x^2+x}{x-1} \le x \Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+x}{x-1} - x = \frac{x^3+x^2+x-x(x-1)}{x-1} = \frac{x(x^2+2)}{x-1} \le 0.$$

Faktorn $x^2+2 > 0$ påverkar inte tecknet och behöver inte tas med i teckenstudiet.

x		0		1	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x(x^2+2)}{x-1}$	$+$	0	$-$	$*$	$+$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3+x^2+x}{x-1} \le x \Leftrightarrow 0 \le x < 1.$$

B: $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
C: $\ln(2-x) > 0 \Leftrightarrow 2-x > 1 \Leftrightarrow x < 1$.
De implikationer som gäller är alltså: $A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C$ och $B \Rightarrow C$.

2. (a) 1) Om alla ord ska inledas med ”MATTE” kan vi plocka bort dessa bokstäver och vi har då bara kvar bokstäverna i ”APPARAT”. Om dessa sju bokstäver varit olika hade vi kunnat bilda 7! olika ord men eftersom vi har två P:n och tre A:n och dessa kan permuteras på 2! respektive 3! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi totalt $\frac{7!}{2!3!} = 420$ olika ord.

2) Vi kan i det här fallet betrakta alla T:n som en bokstav $\mathcal{T} = \text{TTT}$, alla A:n som en bokstav $\mathcal{A} = \text{AAAA}$ och har då totalt sju bokstäver: M,$\mathcal{A}$,$\mathcal{T}$,E,P,P,R. Eftersom vi har två P:n kan vi enligt samma resonemang som i 1) därför bilda $\frac{7!}{2!} = 2520$ olika ord.

(b) Här kan vi förstås göra att induktionsbevis men om vi istället utnyttjar formlerna för geometrisk och aritmetisk summa får vi direkt:

$$\sum_{k=0}^{n}(2^k - 2k + 1) = \sum_{k=0}^{n} 2^k - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = 2^{n+1} - n^2.$$

3. (a) Sats: Om $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ och $a \equiv b \pmod{n}$ så är $ca \equiv cb \pmod{n}$.
Bevis:

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n|(a-b) \Rightarrow n|c(a-b) \Leftrightarrow n|(ca-cb) \Leftrightarrow ca \equiv cb \pmod{n}.$$

(b) Den allmänna lösningen till den linjära differensekvationen

$$\mathcal{L}(y_n) = y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = n \tag{1}$$

ges av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation $\mathcal{L}(y_n) = 0$ och y_{pn} *en* partikulärlösning till (1).

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$ är $r_1 = r_2 = 2$ vilket ger

$$y_{hn} = (C_1 n + C_2)2^n.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
Eftersom högerledet är ett förstagradspolynom ansätter vi $y_{pn} = An + B$. Insättning ger:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n &= A(n+2) + B - 4(A(n+1) + B) + 4(An + B) \\ &= (A - 4A + 4A)n + 2A + B - 4A - 4B + 4B = An - 2A + B = n \\ &\Leftrightarrow A = 1, B = 2. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n = y_{hn} + y_{pn} = (C_1 n + C_2)2^n + n + 2.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y_0 &= (C_1 \cdot 0 + C_2)2^0 + 0 + 2 = C_2 + 2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = -1, \\ y_1 &= (C_1 \cdot 1 + C_2)2^1 + 1 + 2 = (C_1 - 1)2 + 1 + 2 = 2C_1 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 0. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är därför

$$y_n = n + 2 - 2^n.$$

4. (a) Går vi över till polär form får vi

$$\begin{aligned} \arg z = \arg\left(\frac{i(\sqrt{3}+i)^3}{(1-i)^6}\right) &= \arg(i) + 3\arg(\sqrt{3}+i) - 6\arg(1-i) = \frac{\pi}{2} + 3\frac{\pi}{6} - 6\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{2} \\ |z| = \left|\frac{i(\sqrt{3}+i)^3}{(1-i)^6}\right| &= \frac{|i||\sqrt{3}+i|^3}{|1-i|^6} = \frac{1 \cdot 2^3}{(\sqrt{2})^6} = 1, \end{aligned}$$

dvs $z = 1e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

(b) Polynomet i vänsterledet har reella koefficienter och därför är även konjugatet i en rot. Enligt Faktorsatsen har polynomet därför faktorn $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$. Polynomdivision ger $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)$ där den andra faktorn har nollställena $z = 1 \pm i$ Sammanfattningsvis är rötterna $z = \pm i$ och $z = 1 \pm i$.

5. (a) Om p är ett primtal är $\phi(p) = p - 1$ och eftersom 11 är ett primtal är $\phi(11) = 10$. Om x är den multiplikativa inversen till 7 modulo $\phi(11)$ har vi enligt Divisionsalgoritmen:

$$7x \equiv 1 \pmod{10} \Leftrightarrow 7x = 10k + 1 \Leftrightarrow 7x - 10k = 1.$$

Om vi inte ser direkt att $(x, k) = (3, 2)$ är en lösning kan vi hitta den med Euklides algoritm:

$$\left.\begin{aligned} 10 &= 1 \cdot 7 + 3 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2 \cdot (10 - 7) = 7 \cdot 3 - 10 \cdot 2.$$

Den multiplikativa inversen till 7 modulo $\phi(11)$ är alltså 3.

(b) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av nodernas gradtal lika med 2 gånger antalet bågar. Eftersom tre av noderna har grad 4 och tre har grad 2 får vi därför:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + s = 2 \cdot 11 \Leftrightarrow s = 4$$

där s är summan av resterande nodernas gradtal. Enligt Euler-Hierholzers sats innehåller G en Eulercykel om och endast om den är sammanhängande och samtliga noder har jämn grad. Eftersom $s = 4$ är det möjligt att det resterande antalet noder är 4 och deras gradtal 1 som är udda. Med den givna informationen kan vi alltså inte dra slutsatsen att G är en Eulergraf.

(c) Vi sätter e = antal enkelrum, d = antal dubbelrum, t = antal trippelrum och söker de icke-negativa heltalslösningarna till

$$\begin{cases} 400e + 600d + 700t = 13200 \quad \text{(totalsumman som inte får överstigas)} & (1) \\ e + 2d + 3t = 38 \quad \text{(hela laget ska få plats på hotellet)} & (2) \end{cases}$$

Från ekvation (2) får vi $e = 38 - 2d - 3t$. Insättning i ekvation (1) ger efter förenkling den diofantiska ekvationen

$$2d + 5t = 20.$$

Eftersom ekvationen redan är förenklad så långt som möjligt ($\text{sgd}(2,5) = 1$) är den allmänna lösningen $(d,t) = (20d_0+5n, 20t_0-2n)$ där (d_0,t_0) är en lösning till hjälpekvationen $2d+5t = 1$. Vi ser direkt att $(d_0,t_0) = (-2,1)$ löser denna och den allmänna lösningen ges därför av:

$$(d,t) = (-40+5n, 20-2n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

vilket ger $e = 38 - 2d - 3t = 38 - 2(-40+5n) - 3(20-2n) = 58 - 4n$. De icke-negativa heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{array}{r} e \geq 0 \Leftrightarrow 58 - 4n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 14 \\ d \geq 0 \Leftrightarrow -40 + 5n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 8 \\ t \geq 0 \Leftrightarrow 20 - 2n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 8 \leq n \leq 10$$

Ska vi maximera $e = 58-4n$ ska vi använda minsta tillåtna värdet på n dvs 8 vilket ger $e = 26$. Detta är verkligen max antal enkelrum om totalsumman ska vara ≤ 13200 kr. För $n = 8$, som ger $(e,d,t) = (26,0,4)$, är varje rum fullt och väljer vi $e > 26$ blir totalsumman högre eftersom kostnaden per person är högre för enkelrum än för dubbel- och trippelrum. Laget kan alltså högst boka 26 enkelrum.

6. (a) Sätter vi x_1 = antalet Carlsberg, x_2 = antalet Tuborg, x_3 = antalet Falcon och x_4 = antalet Spendrups, söker vi antalet icke-negativa heltalsösningar till

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$$

vilket ges av $\binom{4+24-1}{24} = \binom{27}{24} = \binom{27}{3} = \frac{27\cdot 26\cdot 25}{3\cdot 2\cdot 1} = 2925$.

(b) Om Pelle ska köpa minst tre av varje sort kan vi börja med att lägga undan tre av varje sort och har då 12 öl kvar att välja dvs vi söker nu antalet icks-negativa heltallösningar till

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

vilket ges av $\binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12} = \binom{15}{3} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1} = 455$.

(c) Om Pelle ska köpa tre Falcon, minst tre Carlsberg och högst fem Tuborg har vi $x_3 = 3$, $x_1 \geq 3$ och $x_2 \leq 5$. Om vi först bortser från kravet på högst 5 Tuborg och sätter $y_1 = x_1 - 3$ blir det totala antalet sätt att välja ut de 24 ölen lika med antalet icke-negativa heltalsläsningar till:

$$y_1 + 3 + x_2 + 3 + x_4 = 24 \Leftrightarrow y_1 + x_2 + x_4 = 18$$

vilket ges av $\binom{3+18-1}{18} = \binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20\cdot 19}{2\cdot 1} = 190$. Kravet högst 5 Tuborg är komplementet till minst 6 Tuborg dvs $x_2 \geq 6$ och detta fallet kan vi enkelt beräkna p.s.s. som i (b). Med $y_2 = x_2 - 6$ ges totala antalet sätt att välja ut de 24 ölen då av antalet icke-negativa heltalsläsningar till

$$y_1 + 3 + y_2 + 6 + 3 + x_4 = 24 \Leftrightarrow y_1 + y_2 + x_4 = 12$$

vilket är $\binom{3+12-1}{12} = \binom{14}{12} = \binom{14}{2} = \frac{14\cdot 13}{2\cdot 1} = 91$. Det sökta antalet sätt att välja ut de 24 ölen ges nu av skillnaden mellan de två ovanstående fallen d.v.s. av $190 - 91 = 99$.