HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047 Algebra och diskret matematik 6 hp
Måndagen den 7 januari 2020
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen *(2p)*

$$\sin x + 2\cos^2 x = 2.$$

   (b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: *(3p)*

$$A: \ |1+x| - |x| > x, \qquad B: \ x^2 < 1, \qquad C: \ e^{x-1} < 1.$$

2. (a) Är utsagan $(A \Rightarrow B) \vee (\neg A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$ en tautologi? *(2p)*

   (b) Lös differensekvationen *(3p)*

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{n+2}, \\ y_0 = -1, \ y_1 = 1. \end{cases}$$

3. (a) Hur många olika ”ord” med 12 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTEAPPARAT”

   om varje bokstav ska användas en gång och om:
   1) orden inte får inledas med bokstaven “M”?
   2) ”MATTE” ska ingå som en del någonstans i varje ord? *(2p)*

   (b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1} + 2(k+1)) = 4 + 8 + 14 + 24 + 42 + \cdots + 2^{n+1} + 2(n+1) = 2^{n+2} + n(n+3)$$

   för alla heltal $n \geq 0$. *(3p)*

4. (a) Formulera och bevisa faktorsatsen. *(2p)*

   (b) Ekvationen

$$z^5 + z^3 + 8z^2 + 8 = 0$$

   har roten i. Lös ekvationen fullständigt. *(3p)*

5. (a) Grafen G är sammanhängande och har 11 bågar. Tre av noderna har grad 2 och två har grad 4. De resterande noderna är fler än en men färre än 8 och har samma grad. Är G en Eulergraf? Är det möjligt att rita en graf med 11 noder där alla noder har grad 3? *(2p)*

   (b) Kajsa föddes under andra halvan av 1900-talet. Om man multiplicerar hennes födelsedag med hennes födelsemånad blir produkten ett tvåsiffrigt tal som är lika med det år hon föddes. Multiplicerar man hennes födelsedag med 12 och hennes födelsemånad med 34 blir summan av de resulterande två talen 366. När föddes Kajsa? *(3p)*

6. Ingenjörsstudenten Pelle sitter och skriver en svår tenta i matematik. Tentan består av två delar med sex flervalsfrågor på varje del. På den första delen finns tre svarsalternativ per fråga och på den andra delen finns fyra alternativ per fråga. Endast ett alternativ per fråga är rätt. Tyvärr vet Pelle inte svaret på någon fråga och måste därför gissa. För att bli godkänd krävs minst sex rätta svar och man måste dessutom ha rätt svar på minst en av frågorna från varje del.

   (a) Vad är sannolikheten för att Pelle får alla rätt på tentan om han svarar på alla frågorna? *(1p)*

   (b) Pelle svarar på 4 frågor från varje del innan han tröttnar och lämnar lokalen. Vad är sannolikheten för att han blir godkänd på tentan? *(4p)*

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047 Algebra och diskret matematik 6 hp
Måndagen den 7 januari 2020
Skrivtid: 9.00-14.00

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ insatt i ekvationen följt av faktorisering ger
   $\sin x(\sin x - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Vi har $A : x < 1, x \neq -1$, $B : -1 < x < 1$, $C : x < 1$ dvs $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$ och $B \Rightarrow C$.

2. (a) Gör sanningsvärdestabell. Utsagan är en tautologi.
   Anm: $\wedge$ har högre prioritet än $\vee$ dvs utsagan $P \vee Q \wedge R$ ska tolkas som $P \vee (Q \wedge R)$.

   (b) $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$. Ansats: $y_{pn} = An2^n$. Insättning ger $A = 2$.
   Allmän lösning: $y_n = C_1 + C_2 2^n + 2n2^n$. Sökt lösning: $y_n = 2^{n+1}(n-1) + 1$.

3. (a) i. Antalet ord som inte inleds med M = totala antalet ord − antalet ord som inleds med M $= \frac{12!}{4!3!2!} - \frac{11!}{4!3!2!} = 1524600$.

   ii. Betrakta MATTE som en bokstav $\mathcal{M}$. Vi har då bokstäverna $\mathcal{M}$APPARAT och kan bilda $\frac{8!}{3!2!} = 3360$ olika ord.

   (b) Visas med induktion eller genom att utnyttja formlerna för geometrisk och aritmetisk summa:

$$\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1} + 2(k+1)) = 2\sum_{k=0}^{n}2^k + 2\sum_{k=0}^{n}k + 2\sum_{k=0}^{n}1 = 2\frac{2^{n+1}-1}{2-1} + 2\frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1)$$
$$= 2^{n+2} - 2 + n(n+1) + 2(n+1) = 2^{n+2} + n(n+3).$$

4. (a) Se föreläsningsanteckningar (Polynom).

   (b) Eftersom polynomet i vänsterledet har reella koefficienter är även $-i$ en rot och polynomet har därför faktorn $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$. Polynomdivision ger $z^5 + z^3 + 8z^2 + 8 = (z^2+1)(z^3+8)$. Den binomiska ekvationen $z^3 = -8$ löser vi enklast genom att gå över till polär form. Rötterna till den ursprungliga ekvationen är sammanfattningsvis $z_{1,2} = \pm i$, $z_3 = -2$, $z_{4,5} = (1 \pm i\sqrt{3})$.

5. (a) ”Handskakningslemmat” säger att summan av nodernas grader är lika med 2 gånger antalet bågar vilket ger:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + ng = 2|E| = 2 \cdot 11 \Leftrightarrow ng = 8$$

   där n är det resterande antalet noder och g deras grad. Eftersom de resterande noderna är fler än en och färre än 8 är $(n, g) = (2, 4)$ eller $(n, g) = (4, 2)$. I båda fallen har samtliga G:s noder jämnt gradtal. Enligt Euler-Hierholzers sats är G därför en Eulergraf.

   Enligt “Handskakningslemmat” ovan går det inte att rita en graf med 11 noder där alla noder har grad 3 eftersom $11 \cdot 3 = 33 \neq 2|E|$.

   (b) Med d = dag och m = månad söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

$$12d + 34m = 366.$$

   Vi får $(d, m) = (5, 9)$ respektive $(d, m) = (22, 3)$ där bara den sista lösningen ger ett födelseår $dm = 66$ under den senare halvan av 1900-talet. Kajsa föddes alltså den 22 mars 1966.

6. Sannolikheten för en händelse A ges av

$$P(A) = \frac{U_{\text{G}}}{U_{\text{Tot}}} = \frac{\text{Antalet gynnsamma utfall för } A}{\text{Totala antalet möjliga utfall}}$$

   (a) Det finns bara ett sätt att få alla rätt och vi får därför

$$P(\text{Alla rätt}) = \frac{U_{\text{G}}}{U_{\text{Tot}}} = \frac{1}{3^6 4^6} = \frac{1}{2985984}.$$

(b) Pelle svarar bara på 4 frågor från varje del och vi behöver därför bara räkna med dessa, dvs som om provet hade 8 frågor och två delar med 4 fyra frågor på varje del. Detta innebär också att om Pelle får minst 6 rätt är kravet på minst ett rätt på varje del automatiskt uppfyllt.

Minst 6 rätt betyder 6, 7 eller 8 rätt och totala antalet gynnsamma utfall ges därför av summan av antalet gynnsamma utfall för dessa tre fall:

$$U_{\mathrm{G}}(6\mathrm{R}) = \underbrace{\binom{4}{2}1^2\binom{2}{2}2^2\binom{4}{4}1^4}_{\text{2R,2F + 4R,0F}} + \underbrace{\binom{4}{3}1^3\binom{1}{1}2^1\binom{4}{3}1^3\binom{1}{1}3^1}_{\text{3R,1F + 3R,1F}} + \underbrace{\binom{4}{4}1^4\binom{4}{2}1^2\binom{2}{2}3^2}_{\text{4R,0F + 2R,2F}} = 174$$

$$U_{\mathrm{G}}(7\mathrm{R}) = \underbrace{\binom{4}{3}1^3\binom{1}{1}2^1\binom{4}{4}1^4}_{\text{3R,1F + 4R,0F}} + \underbrace{\binom{4}{4}1^4\binom{4}{3}1^3\binom{1}{1}3^1}_{\text{4R,0F + 3R,1F}} = 20$$

$$U_{\mathrm{G}}(8\mathrm{R}) = \underbrace{\binom{4}{4}1^4\binom{4}{4}1^4}_{\text{4R,0F + 4R,0F}} = 1$$

Sannolikheten för att Pelle får minst 6 rätt och blir godkänd är alltså

$$P(\geq 6 \text{ rätt}) = \frac{U_{\mathrm{G}}}{U_{\mathrm{Tot}}} = \frac{U_{\mathrm{G}}(6\mathrm{R}) + U_{\mathrm{G}}(7\mathrm{R}) + U_{\mathrm{G}}(8\mathrm{R})}{U_{\mathrm{Tot}}} = \frac{174 + 20 + 1}{3^4 4^4} = \frac{65}{6912} < \frac{1}{100}.$$