HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Fredagen den 30 oktober 2020
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$|x-2|+|x+3|=5x^2.$$

(b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*3p*)

$$A:\ \frac{x^3+3x^2-2x}{x-2}\leq x, \qquad B:\ e^{x-2}<1, \qquad C:\ |x|\leq 2.$$

2. (a) En skolklass består av 8 flickor och 6 pojkar. Klassen ska delta i en stor matematiktävling och man ska därför ta ut ett lag med 5 elever som ska representera klassen. Enligt tävlingsreglerna ska varje lag bestå av minst 2 flickor och minst 2 pojkar. På hur många sätt kan man ta ut laget? Svaret ska anges på beräknad form dvs som ett heltal. (*2p*)

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2}-5y_{n+1}+6y_n=3^{n+1}, \\ y_0=-1,\ .y_1=1. \end{cases}$$

3. (a) Skriv talet

$$\frac{i(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^3}$$

på rektangulär form ($a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$). (*2p*)

(b) Ekvationen

$$z^5-3z^4+2z^3+4z^2-8z+4=0$$

har en rot som är $1-i$ och en rot som är lätt att gissa. Lös ekvationen fullständigt. (*3p*)

4. (a) Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (*2p*)

(b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} 3\cdot 2^{2k+1}=6+24+96+\cdots+3\cdot 2^{2n+1}=2(4^{n+1}-1)$$

för alla heltal $n\geq 0$. (*3p*)

5. (a) Grafen G är sammanhängande och har 12 bågar. 5 av noderna har grad 2 och 2 av noderna har grad 4. De resterande noderna är fler än 2. Kan man med denna information dra slutsatsen att G är en Eulergraf? (*2p*)

(b) Den lilla filmklubben Finfilm hade filmvisning en kväll. Föreställningen var öppen för alla men klubbens medlemmar fick 40 kr i rabatt på biljettpriset som var 110 kr. Av dem som såg filmen var mindre än hälften medlemmar och filmklubben fick totalt in 2000 kr i biljettintäkter under kvällen. Hur många medlemmar såg filmen? (*3p*)

6. (a) Bestäm ett tal x så att $23x\equiv 1 \pmod{\phi(155)}$. (*2p*)

(b) En studentpub säljer sju olika sorters öl. En kväll kommer fem törstiga ingenjörsstudenter in och beställer var sin öl. Beställningen görs så att inte tre (eller fler) av studenterna får samma sorts öl. På hur många sätt kan det göras? Svaret ska anges på beräknad form. (*3p*)

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Vi har:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases} \qquad |x+3| = \begin{cases} x+3, & x \geq -3 \\ -(x+3), & x < -3 \end{cases}$$

och vi löser därför ekvationen i tre intervall:

x	-3	2	
	$\lvert x-2\rvert + \lvert x+3\rvert = 5x^2$ $\Leftrightarrow -(x-2)-(x+3) = 5x^2$ $\Leftrightarrow -2x-1 = 5x^2$ $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}\big(1 \pm 2i\big)$ Saknar reella lösningar!	$\lvert x-2\rvert + \lvert x+3\rvert = 5x^2$ $\Leftrightarrow -(x-2)+x+3 = 5x^2$ $\Leftrightarrow 5 = 5x^2$ $\Leftrightarrow x = \pm 1$	$\lvert x-2\rvert + \lvert x+3\rvert = 5x^2$ $\Leftrightarrow x-2+x+3 = 5x^2$ $\Leftrightarrow 2x+1 = 5x^2$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}\big(1 \pm \sqrt{6}\big) < \frac{1}{5}\big(1+3\big) < 2$ Ligger utanför intervallet!

$$\therefore |x-2| + |x+3| = 5x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

(b) A : Vi samlar alla termer på vänster sida om olikhetstecknet, gör liknämnigt, faktoriserar och gör teckenstudium:

$$\frac{x^3+3x^2-2x}{x-2} \leq x \Leftrightarrow \frac{x^3+3x^2-2x}{x-2} - x = \frac{x^3+3x^2-2x-x(x-2)}{x-2} = \frac{x^2(x+2)}{x-2} \leq 0.$$

x		-2		0		2	
x^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x^2(x+2)}{x-2}$	$+$	0	$-$	0	$-$	$*$	$+$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3+3x^2-2x}{x-2} \leq x \Leftrightarrow -2 \leq x < 2.$$

$B : e^{x-2} < 1 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2.$
$C : |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$
De implikationer som gäller är alltså: $A \Rightarrow B$ och $A \Rightarrow C$.

2. (a) Här handlar det om urval utan hänsyn till ordningen och utan upprepning dvs kombinationer. Antalet sätt att välja ut t.ex. 2 flickor bland 8 ges av $\binom{8}{2}$. Eftersom urvalet av pojkar är helt oberoende av urvalet av flickor ges totala antalet urval av fem elever där minst 2 är flickor och minst 2 är pojkar enligt additions- och multiplicationsprinciperna av

$$\binom{8}{2}\binom{6}{3} + \binom{8}{3}\binom{6}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} = 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 1400.$$

(b) Den allmänna lösningen till den linjära differensekvationen

$$\mathcal{L}(y_n) = y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 3^{n+1} \tag{1}$$

ges av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation $\mathcal{L}(y_n) = 0$ och y_{pn} *en* partikulärlösning till (1).

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 5r + 6 = 0$ är $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$ vilket ger

$$y_{hn} = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
Eftersom högerledet $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$ är en exponentialfunktion med basen 3 är standardansatsen $A3^n$ men eftersom den ingår i y_{hn} (och därför inte kommer att fungera) gör vi istället ansatsen $y_{pn} = An3^n$. Insättning ger:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n &= A(n+2)3^{n+2} - 5A(n+1)3^{n+1} + 6An3^n \\ &= ((9-15+6)n + 18 - 15)A3^n = 3A3^n = 3^{n+1} \Leftrightarrow A = 1. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 2^n + C_2 3^n + n3^n.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 2^0 + C_2 3^0 + 0 = C_1 + C_2 = -1 \Leftrightarrow C_1 = -1 - C_2, \\ y_1 &= C_1 2^1 + C_2 3^1 + 3^1 = 2(-1 - C_2) + 3C_2 + 3 = C_2 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 0 \end{aligned}$$

vilket ger $C_1 = -1$. Den sökta lösningen är därför $y_n = n3^n - 2^n$.

3. (a) Går vi över till polär form får vi

$$\begin{aligned} \arg z &= \arg\left(\frac{i(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^3}\right) = \arg(i) + 8\arg(1+i) - 3\arg(1-i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + 8\frac{\pi}{4} - 3\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{2}, \\ |z| &= \left|\frac{i(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^3}\right| = \frac{|i||1+i|^8}{|1-i\sqrt{3}|^3} = \frac{1\cdot\sqrt{2}^8}{2^3} = 2, \end{aligned}$$

dvs $z = 2e^{i\frac{7\pi}{2}} = 2e^{i(2\pi+\frac{3\pi}{2})} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$.

(b) Polynomet i vänsterledet har reella koefficienter och därför är även konjugatet till $1-i$ dvs $1+i$ en rot. Gissning ger dessutom roten 1. Enligt Faktorsatsen har polynomet därför faktorn

$$(z-(1+i))(z-(1-i))(z-1) = (z^2-2z+2)(z-1) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2.$$

Polynomdivision ger nu att

$$z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 4z^2 - 8z + 4 = (z^3 - 3z^2 + 4z - 2)(z^2 - 2)$$

där den andra faktorn har nollställena $z = \pm\sqrt{2}$.
Sammanfattningsvis är rötterna $z = 1 \pm i$, $z = 1$ samt $z = \pm\sqrt{2}$.

4. (a) Vi söker en formel för den geometriska summan:

$$S = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \text{ där } x \neq 1.$$

Vi har

$$\begin{aligned} xS &= x(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) = \underbrace{x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n}_{S-1} + x^{n+1} = S - 1 + x^{n+1} \\ &\Leftrightarrow S(x-1) = x^{n+1} - 1 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} S = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}. \end{aligned}$$

(b) Här kan vi förstås göra att induktionsbevis men om vi istället utnyttjar formlen för en geometrisk summa ovan får vi direkt:

$$\sum_{k=0}^{n} 3\cdot 2^{2k+1} = 6\sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = 6\sum_{k=0}^{n} 4^k = 6\frac{4^{n+1}-1}{4-1} = 2(4^{n+1}-1).$$

5. (a) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av nodernas gradtal lika med 2 gånger antalet bågar. Eftersom 5 av noderna har grad 2 och 2 har grad 4 får vi därför:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 5\cdot 2 + 2\cdot 4 + s = 2\cdot 12 \Leftrightarrow s = 6$$

där s är summan av resterande nodernas gradtal. Enligt Euler-Hierholzers sats innehåller G en Eulercykel om och endast om den är sammanhängande och samtliga noder har jämn grad. Eftersom $s = 6$ är det möjligt att det resterande antalet noder är 6 och deras gradtal 1 som är udda. Med den givna informationen kan vi alltså inte dra slutsatsen att G är en Eulergraf.

(b) Vi sätter $m =$ antal medlemmar och $i =$ antal icke-medlemmar som såg filmen och söker alltså de icke-negativa heltalslösningarna till den diofantiska ekvationen

$$70m + 110i = 2000 \Leftrightarrow 7m + 11i = 200.$$

Eftersom $\text{sgd}(7,11) = 1|200$ har ekvationen heltalslösning och den allmänna lösningen ges av

$$(m,i) = (200m_0 + 11n, 200i_0 - 7n),\ n \in \mathbb{Z}$$

där (m_0, i_0) är en lösning till hjälpekvationen $7m + 11i = 1$. Eftersom $\text{sgd}(7,11) = 1$ kan vi hitta en sådan med hjälp av Euklides algoritm:

$$\left.\begin{aligned} 11 &= 1\cdot 7 + 4 \\ 7 &= 1\cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1\cdot 3 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= 4 - 3 = 11 - 7 - (7-4) = 11 - 2\cdot 7 + 4 \\ &= 11 - 2\cdot 7 + 11 - 7 = 7\cdot(-3) + 11\cdot 2. \end{aligned}$$

Vi kan alltså välja $(m_0, i_0) = (-3, 2)$ och den allmänna lösningen ges nu av:

$$(m,i) = (-600 + 11n, 400 - 7n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De icke-negativa heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{aligned} m \geq 0 \Leftrightarrow -600 + 11n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{600}{11} = 54.5\ldots \\ i \geq 0 \Leftrightarrow 400 - 7n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{400}{7} = 57.1\ldots \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow 55 \leq n \leq 57.$$

Enligt uppgiften söker vi lösningar där $m < \frac{m+i}{2}$. i minskar med 7 och m ökar med 11 då n ökar med 1. Eftersom $n = 55$ ger $(m,i) = (5,15)$ kan vi därför direkt dra slutsatsen att 5 medlemmar såg filmen.

6. (a) Om p och q är två olika primtal är $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$. Eftersom $155 = 5\cdot 31$ (dvs en produkt av två olika primtal) får vi direkt att $\phi(155) = (5-1)(31-1) = 120$. Enligt divisionsalgoritmen har vi

$$23x \equiv 1 \pmod{\phi(155)} \Leftrightarrow 23x \equiv 1 \pmod{120} \Leftrightarrow 23x = 120k + 1 \Leftrightarrow 23x - 120k = 1.$$

Vi kan hitta en lösning till den diofantiska ekvationen med Euklides algoritm:

$$\left.\begin{aligned} 120 &= 5\cdot 23 + 5 \\ 23 &= 4\cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1\cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1\cdot 2 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= 3 - 2 = 23 - 4\cdot 5 - (5-3) = 23 - 5\cdot 5 + 3 \\ &= 23 - 5(120 - 5\cdot 23) + 23 - 4\cdot 5 \\ &= 23\cdot 27 - 120\cdot 5 - 4(120 - 5\cdot 23) = 23\cdot 47 - 120\cdot 9. \end{aligned}$$

$x = 47$ är alltså en lösning till kongruensekvationen.

(b) Om färre än tre ska välja samma ölsort får vi tre fall:

Fall 1: Alla beställer olika ölsorter. Enligt multiplikationsprincipen kan det kan göras på

$$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520 \text{ olika sätt}$$

eftersom den första studenten som väljer har 7 sorter att välja på, den andra 6 sorter, osv.

Fall 2: Ett par av studenterna beställer samma sort och de övriga tre beställer andra och olika sorter. Här får vi börja med att välja ut de två studenter som ska köpa samma ölsort. Det kan göras på $\binom{5}{2}$ olika sätt. Paret kan sedan beraktas som en student vid valet av ölsort och vi får därför på samma sätt som i (1)

$$\binom{5}{2}\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 8200 \text{ olika sätt.}$$

Fall 3: I sista fallet har vi två par där ett av paren beställer en sort, det andra paret beställer en annan sort och den resterande studenten beställer en tredje sort. I det här fallet får vi först välja ut 2 par bland de 5 studenterna och detta kan göras på $\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{2}$ olika sätt. 2:an i nämnaren beror på att ordningen i vilken vi väljer ut paren här inte har någon betydelse. Vi får därför i det här fallet

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{2}\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 3150 \text{ olika sätt.}$$

Totala antalet beställningar ges nu enligt additionsprincipen av

$$2520 + 8200 + 3150 = 14070.$$

Amn: Man kan förstås även lösa problemet på följande sätt: Antalet beställningar där färre än 3 väljer samma ölsort = totala antalet möjliga beställningar − beställningarna där minst 3 väljer samma ölsort dvs:

- 3 väljer en sort och 2 väljer andra och olika sorter
- 3 väljer en sort och 2 väljer en annan sort
- 4 väljer en sort och 1 väljer en annan sort
- 5 väljer samma sort

Med samma resonemang som ovan får vi då

$$7^5 - \binom{5}{3} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 - \binom{5}{3} \cdot 7 \cdot 6 - \binom{5}{4} \cdot 7 \cdot 6 - \binom{5}{5} \cdot 7 = 16807 - 2100 - 420 - 210 - 7 = 14070.$$