**HÖGSKOLAN I HALMSTAD**
**Akademin för informationsteknologi**
Mikael Hindgren
035-167220

**Tentamensskrivning**
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Fredagen den 29 oktober 2021
Skrivtid: 15.00-20.00

***Inga hjälpmedel.*** *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös olikheten *(2p)*

$$\frac{x^3 - x - 1}{x - 2} \geq x.$$

   (b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal $x$: *(3p)*

$$A: \ |x-1| + |x+1| > x^2, \qquad B: \ \ln(2-x) \leq 0, \qquad C: \ x^2 \leq 4.$$

2. (a) Är den sammansatta utsagan $(\neg X \Rightarrow Y) \vee (X \wedge Y)$ en tautologi? *(2p)*

   (b) Lös differensekvationen *(3p)*

$$\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 2, \\ y_0 = 1, \ y_1 = 2. \end{cases}$$

3. (a) Skriv de båda talen $z_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$ på polär form, beräkna därefter $z_1^3$ och $z_2^3$ och ange svaren på rektangulär form. *(2p)*

   (b) Ekvationen

$$z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 8z^2 + 16z - 16 = 0$$

   har roten $1 - i$. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. *(3p)*

4. (a) Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. *(2p)*

   (b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} (2 \cdot 3^{k+1} + 3(1-2k)) = 9 + 15 + 45 + \cdots + 2 \cdot 3^{n+1} + 3(1-2n) = 3(3^{n+1} - n^2)$$

   för alla heltal $n \geq 0$. *(3p)*

5. (a) Grafen $G$ är sammanhängande, har 10 bågar och 6 av noderna har grad 2. De resterande noderna är färre än 6 och har alla samma grad. Kan man med denna information dra slutsatsen att $G$ är en Eulergraf? *(2p)*

   (b) Tågingenjören Kajsa blir inkallad när spåret mellan två stationer blivit strömlöst. Passagerarna på ett av tågen måste därför transporteras med bussar mellan de två stationerna. Varje sittvagn i tåget har 75 sittplatser och samtliga platser är upptagna. Förutom sittvagnarna finns även en restaurangvagn där 20 passagerare befinner sig. Varje buss rymmer 55 passagerare och de fylls innan de lämnar stationen. När Kajsa flyttat samtliga passagerare från tåget till bussarna har den sista bussen 35 passagerare. Vilket är det minsta antalet passagerare som kan ha befunnit sig på tåget? *(3p)*

6. (a) Bestäm $\phi(77)$ och beräkna $9^{242} \mod 77$. *(2p)*

   (b) I spelingenjören Pelles populära tärningsspel kastar spelaren en vanlig tärning fyra gånger och beräknar totalsumman $s$ som erhållits från de fyra kasten d.v.s. $4 \leq s \leq 24$. Vad är sannolikheten för att en kastserie ger $s = 15$ ? Svaret ska anges på beräknad form som en kvot mellan två heltal. *(3p)*

*Lycka till!*

# Lösningsförslag

1. (a) Vi samlar alla termer på vänster sida om olikhetstecknet, gör liknämnigt, faktoriserar och gör teckenstudium:

$$\frac{x^3-x-1}{x-2} \geq x \Leftrightarrow \frac{x^3-x-1}{x-2} - x = \frac{x^3-x-1-x(x-2)}{x-2} = \frac{x^3-x^2+x-1}{x-2}$$
$$= \frac{(x-1)(x^2+1)}{x-2} \geq 0.$$

Gissning ger nollstället $x=1$ och faktorn $x-1$. Faktorn $x^2+1>0$ påverkar inte tecknet och tas därför inte med i teckenstudiet:

| $x$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x-2}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $*$ | $+$ |

Olikheten är alltså uppfylld för $x \leq 1$ eller $x > 2$.

(b) $A$ : Vi har:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases} \qquad |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$$

och vi löser därför olikheten i tre intervall:

| $x$ | $-1$ | $1$ | |
|---|---|---|---|
| | $\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert > x^2$ | $\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert > x^2$ | $\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert > x^2$ |
| | $\Leftrightarrow -(x-1)-(x+1) > x^2$ | $\Leftrightarrow -(x-1)+x+1 > x^2$ | $\Leftrightarrow x-1+x+1 > x^2$ |
| | $\Leftrightarrow -2x > x^2$ | $\Leftrightarrow 2 > x^2$ | $\Leftrightarrow 2x > x^2$ |
| | $\Leftrightarrow x(x+2) < 0$ | $\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ | $\Leftrightarrow x(x-2) < 0$ |
| | $\Leftrightarrow -2 < x < 0$ | Uppfyllt för alla $x$ i intervallet! | $0 < x < 2$ |

$$\therefore |x-1|+|x+1| > x^2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

$B$ : $\ln(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < 2-x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$.
$C$ : $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.
De implikationer som gäller är alltså: $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$ och $B \Rightarrow C$.

2. (a) Utsagan är en tautologi omm den är sann oberoende av sanningsvärdet för de ingående variablerna $X$ och $Y$. Vi gör en sanningsvärdestabell

| $X$ | $Y$ | $\neg X$ | $\neg X \Rightarrow Y$ | $X \wedge Y$ | $(\neg X \Rightarrow Y) \vee (X \wedge Y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S | S | F | S | S | S |
| S | F | F | S | F | S |
| F | S | S | S | F | S |
| F | F | S | F | F | F |

och drar slutsatsen att utsagan inte är en tautologi.

(b) Den allmänna lösningen till den linjära differensekvationen

$$\mathcal{L}(y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 2 \tag{1}$$

ges av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där $y_{hn}$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation $\mathcal{L}(y_n) = 0$ och $y_{pn}$ *en* partikulärlösning till (1).

i. *Bestämning av $y_{hn}$:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2-2r+1 = (x-1)^2 = 0$ är $r_1 = r_2 = 1$ vilket ger

$$y_{hn} = (C_1 n + C_2)1^n = C_1 n + C_2.$$

ii. *Bestämning av $y_{pn}$:*
Eftersom högerledet 2 är ett polynom av grad 0 (konstant) är standardansatsen en konstant $A$ men eftersom en konstantterm ingår i $y_{hn}$ kommer den inte att fungera. Multiplikation med $n$ räcker inte heller eftersom även $An$ finns i $y_{hn}$. Vi gör därför ansatsen $y_{pn} = An^2$ och insättning ger:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n &= A(n+2)^2 - 2A(n+1)^2 + An^2 \\ &= A((1-2+1)n^2 + (4-4)n + 4 - 2) = 2A = 2 \Leftrightarrow A = 1. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 n + C_2 + n^2.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 \cdot 0 + C_2 + 0^2 = C_2 = 1, \\ y_1 &= C_1 \cdot 1 + C_2 + 1^2 = C_1 + 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 0. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är därför $y_n = 1 + n^2$.

3. (a)

$$\left.\begin{aligned} \arg(z_{1,2}) &= \arg(-1 \pm i\sqrt{3}) = \pm\frac{2\pi}{3} \\ |z_{1,2}| &= |-1 \pm i\sqrt{3}| = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_{1,2} = 2e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow z_{1,2}^3 = 2^3 e^{\pm i3\frac{2\pi}{3}} = 8e^{\pm i2\pi} = 8.$$

(b) Polynomet i vänsterledet har reella koefficienter och därför är även konjugatet till $1 - i$ dvs $1 + i$ en rot. Enligt Faktorsatsen har då polynomet faktorn

$$(z - (1+i))(z - (1-i)) = z^2 - 2z + 2.$$

Polynomdivision ger nu att

$$z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 8z^2 + 16z - 16 = (z^2 - 2z + 2)(z^3 - 8).$$

Den andra faktorns nollställen bestäms av $z^3 = 8$ dvs en binomisk ekvation som kan lösas genom att gå över till polär form. Det behövs dock inte i det här fallet eftersom vi direkt ser att $z = 2$ är en rot och enligt uppgift 3a ovan är även $-1 \pm i\sqrt{3}$ rötter. Eftersom en algebraisk ekvation av grad 3 har högst tre olika rötter kan det inte finnas några fler. Sammanfattningsvis är rötterna till den ursprungliga ekvationen $z = 1 \pm i$, $z = 2$ samt $z = -1 \pm i\sqrt{3}$.

4. (a) Vi söker en formel för den aritmetiska summan:

$$S = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n.$$

Vi har

$$\begin{aligned} 2S &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n \\ &= \underbrace{(1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ st lika stora termer}} = n(n+1) \\ &\Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

(b) Här kan vi förstås göra att induktionsbevis men om vi istället utnyttjar formlerna för aritmetisk och geometrisk summa får vi direkt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 3^{k+1} + 3(1-2k) &= 6\sum_{k=0}^{n} 3^k + 3\sum_{k=0}^{n} 1 - 6\sum_{k=1}^{n} k = 6\frac{3^{n+1}-1}{3-1} + 3(n+1) - 6\frac{n(n+1)}{2} \\ &= 3 \cdot 3^{n+1} - 3 + 3n + 3 - 3n^2 - 3n = 3(3^{n+1} - n^2). \end{aligned}$$

5. (a) Enligt "Handskakningslemmat" är summan av nodernas gradtal lika med 2 gånger antalet bågar. Eftersom 6 av noderna har grad 2 får vi därför:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 6\cdot 2 + ng = 2\cdot 10 \Leftrightarrow ng = 8$$

där $n$ är det resterande antalet noder och $g$ deras gradtal. Eftersom $n < 6$ är de enda möjligheterna att $(n, g) = (1, 8)$, $(2, 4)$ eller $(4, 2)$ dvs i samtliga fall är $g$ jämnt. Enligt Euler-Hierholzers sats innehåller $G$ en Eulercykel om och endast om den är sammanhängande och samtliga noder har jämnt gradtal. Vi kan alltså i det här fallet dra slutsatsen att $G$ måste vara en Eulergraf.

(b) Vi sätter $t$ = antal tågvagnar och $b$ = antal bussar och söker de icke-negativa heltalslösningarna till den diofantiska ekvationen

$$75t + 20 = 55b + 35 \Leftrightarrow 15t - 11b = 3.$$

Eftersom $\mathrm{sgd}(15, 11) = 1$ har ekvationen heltalslösning och den allmänna lösningen ges av

$$(t, b) = (3t_0 + 11n, 3b_0 + 15n),\ n \in \mathbb{Z}$$

där $(t_0, b_0)$ är en lösning till hjälpekvationen $15t - 11b = 1$. Eftersom $\mathrm{sgd}(15, 11) = 1$ kan vi hitta en sådan med hjälp av Euklides algoritm:

$$\left.\begin{aligned} 15 &= 1\cdot 11 + 4 \\ 11 &= 2\cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1\cdot 3 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= 4 - 3 = 15 - 11 - (11 - 2\cdot 4) = 15 - 2\cdot 11 + 2\cdot 4 \\ &= 15 - 2\cdot 11 + 2(15 - 11) = 15\cdot 3 - 11\cdot 4. \end{aligned}$$

Vi kan alltså välja $(t_0, b_0) = (3, 4)$ och den allmänna lösningen ges nu av:

$$(t, b) = (9 + 11n, 12 + 15n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De minsta positiva värdena på $(t, b)$ ges då $n = 0$ och vi kan därför dra slutsatsen att det minsta antalet passagerare som kan ha befunnit sig på tåget var $9\cdot 75 + 20 = 695$.

6. (a) Om $p$ och $q$ är två olika primtal är $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$. Eftersom $77 = 11\cdot 7$ (dvs en produkt av två olika primtal) får vi direkt att $\phi(77) = (11 - 1)(7 - 1) = 60$.
Eftersom $\mathrm{sgd}(9, 77) = 1$ ger Eulers sats att $9^{\phi(77)} \equiv 1 \pmod{77}$ och vi får därför

$$9^{242} = 9^{60}\cdot 9^{60}\cdot 9^{60}\cdot 9^{60}\cdot 9^2 \equiv 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 9^2 = 81 = 1\cdot 77 + 4 \equiv 4 \pmod{77}$$

dvs $9^{242} \mod 77 = 4$.

(b) Sätter vi $x_i$ = resultatet som kast nr $i$ ger (dvs $1 \le x_i \le 6$) och $y_i = x_i - 1$ söker vi alltså antalet heltalslösningar $0 \le y_i \le 5$ till ekvationen:

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 = 15 \Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11.$$

Bortser vi först från kravet att $y_i \le 5$ ges totala antalet icke-negativa heltalslösningar av

$$\binom{4 + 11 - 1}{11} = \binom{14}{11} = \binom{14}{3}.$$

Eftersom summan i högerledet är 11 finns det dock lösningar bland dessa där en (men inte fler) av variablerna är större än 5, exempelvis där $y_1 \ge 6$ vilket motsvarar att första tärningskastet visar mer än 6 vilket är omöjligt. Vi måste därför dra bort antalet sådana lösningar och inför vi variabeln $z_1 = y_1 - 6 \ge 0$ söker vi antalet icke-negativa heltalslösningar till

$$z_1 + 6 + y_2 + y_3 + y_4 = 11 \Leftrightarrow z_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

som ges av

$$\binom{4 + 5 - 1}{5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3}.$$

Eftersom vi har fyra variabler som kan vara större än 5 ges nu totala antalet gynnsamma utfall av

$$\binom{14}{3} - 4\binom{8}{3} = \frac{14\cdot 13\cdot 12}{3\cdot 2\cdot 1} - 4\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 364 - 4\cdot 56 = 140.$$

Totala antalet möjliga utfall är $6^4$ och sannolikheten för att summan vid en kastserie blir 15 är därför

$$P(s = 15) = \frac{140}{6^4} = \frac{140}{1296} = \frac{35}{324} \approx 11\%.$$