HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Tisdagen den 4 januari 2022
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$|x| + x^2 = |x+1|.$$

(b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*3p*)

$$A : \frac{x^3+2x^2-x}{x-1} \leq x, \qquad B : e^{1-x} \geq 1, \qquad C : x^2 \leq 1.$$

2. (a) Hur många olika ”ord” med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTETENTA”

om varje bokstav ska användas en gång och om

1) orden ska inledas med bokstaven “M” och sluta med bokstaven “A” ?
2) ord där samtliga vokaler “A,A,E,E” står intill varandra (oavsett inbördes ordning) inte ska räknas med?

(*2p*)

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = n, \\ y_0 = y_1 = 1. \end{cases}$$

3. (a) Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (*2p*)

(b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 2^{2k+1} = 6 + 24 + 96 + \cdots + 3 \cdot 2^{2n+1} = 2(4^{n+1}-1)$$

för alla heltal $n \geq 0$. (*3p*)

4. (a) Skriv talet

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2i}\right)^{99}$$

på rektangulär form $(a+ib)$. (*2p*)

(b) Ekvationen

$$z^5 - z^4 - z^3 + z^2 - 2z + 2 = 0$$

har roten i. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. (*3p*)

5. (a) Grafen G är sammanhängande och har 13 bågar. 4 av noderna har grad 2 och 3 av noderna har grad 4. De resterande noderna är färre än 4 och har alla samma grad. Kan man med denna information dra slutsatsen att G är en Eulergraf? (*2p*)

(b) När filmklubben Storfilm har filmvisning är föreställningen öppen för alla men klubbens medlemmar får rabatt på biljettpriset som är 100 kr. Klubben har två typer av medlemskap: A-medlemmar som får 50% rabatt och B-medlemmar som får 30% rabatt. En kväll såg totalt 150 personer föreställningen och klubben fick in totalt 14500 kr i biljettintäkter. Hur många B-medlemmar kan högst ha sett filmen? (*3p*)

6. Pelle tjuvlyssnar på Kajsas och Kalles krypterade internetkommunikation och han lyckas identifiera det krypterade meddelandet $K = 2$ från Kajsa, som hon krypterat med RSA genom

$$K = M^e \bmod n,$$

där heltalet M är det hemliga meddelandet hon vill skydda $(1 \leq M \leq n-1)$, $e = 13$ och $n = 62$.

(a) Bestäm $\varphi(n)$. (*1p*)

(b) Vilket var Kajsas hemliga meddelande M ? (*4p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Tisdagen den 4 januari 2022
Skrivtid: 9.00-14.00

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Lös ekvationen i tre intervall där gränserna är -1 och 0.
   Svar: $x = 1$ eller $x = 1 - \sqrt{2}$.

   (b) Vi har $A : -1 \le x < 1$, $B : x \le 1$, $C : -1 \le x \le 1$ dvs $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$ och $C \Rightarrow B$.

2. (a) 1) Antalet ord som inleds med M och slutar med A är $\frac{8!}{4!2!} = 840$.
   2) Betrakta alla vokalerna (A,A,E,E) som en bokstav $\mathcal{V}$. Vi har då bokstäverna $\mathcal{V}$MTTTNT och kan bilda $\frac{7!}{4!} = 210$ olika ord. Antalet ord där alla vokaler inte står intill varandra är därför $\frac{10!}{4!2!2!} - \frac{7!}{4!} = 37590$.

   (b) $y_{hn} = (C_1 n + C_2)2^n$. Ansats: $y_{pn} = An + B$. Insättning ger $A = 1$, $B = 2$.
   Allmän lösning: $y_n = (C_1 n + C_2)2^n + n + 2$. Sökt lösning: $y_n = n + 2 - 2^n$.

3. (a) Se föreläsningen Polynom, s. 10.

   (b) Visas med induktion eller genom att utnyttja formeln för en geometrisk summa:
$$\sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 2^{2k+1} = 6\sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = 6\sum_{k=0}^{n} 4^k = 6\frac{4^{n+1}-1}{4-1} = 2(4^{n+1}-1).$$

4. (a) Går vi över till polär form får vi
$$\arg z = \arg\left(\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2i}\right)^{99}\right) = 99(\arg(1-i\sqrt{3}) - \arg(2i)) = 99\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{231\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 57\cdot 2\pi,$$
$$|z| = \left|\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2i}\right)^{99}\right| = \left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2i}\right|^{99} = \left(\frac{|1-i\sqrt{3}|}{|2i|}\right)^{99} = \left(\frac{2}{2}\right)^{99} = 1,$$
   dvs $z = 1 \cdot e^{i(\frac{3\pi}{2} + 57\cdot 2\pi)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

   (b) Eftersom polynomet $p(z)$ i vänsterledet har reella koefficienter är även $-i$ en rot. Gissning ger dessutom roten $z = 1$ och $p(z)$ har därför faktorn $(z-i)(z+i)(z-1) = (z^2+1)(z-1) = z^3 - z^2 + z - 1$. Polynomdivision ger nu $p(z) = (z^3 - z^2 + z - 1)(z^2 - 2)$ där den sista faktorn har rötterna $z = \pm\sqrt{2}$.
   Svar: $z = \pm i$, $z = 1$ och $z = \pm\sqrt{2}$.

5. (a) ”Handskakningslemmat” ger:
$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 4\cdot 2 + 3\cdot 4 + ng = 2|E| = 2\cdot 13 \Leftrightarrow ng = 6$$
   där n är det resterande antalet noder och g deras grad. Eftersom de resterande noderna är färre än 4 är $(n, g) = (1, 6)$, $(2, 3)$ eller $(3, 2)$. Enligt Euler-Hierholzers sats är G en Eulergraf omm samtliga noder har jämn grad. För fallet $(n, g) = (2, 3)$ är inte detta uppfyllt dvs G kan vara en Eulergraf men det är inte säkerställt att den är det.
   Svar: Nej.

   (b) Med $i =$ antal icke-medlemmar, $a =$ antal A-medlemmar och $b =$ antal B-medlemmar söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till ekvationssystemet
$$\begin{cases} 100i + 50a + 70b = 14500 & (1) \\ i + a + b = 150 & (2) \end{cases}$$
   (2) ger $i = 150 - a - b$ vilket insatt i (1) ger den Diofantiska ekvationen
$$5a + 3b = 50$$
   som har de icke-negativa heltalslösningarna $(a, b) = (-50 + 3n, 100 - 5n)$, $17 \le n \le 20$. $n = 17$ ger största värde på b (och även positvt i) dvs högst $100 - 5\cdot 17 = 15$ B-medlemmar såg föreställningen.

6. (a) Eftersom $n = 62 = 2\cdot 31$, dvs en produkt av två olika primtal, är $\phi(n) = (2-1)(31-1) = 30$.

   (b) Se föreläsningen Restklassaritmetik sid 19-20. Hemliga nyckeln $d = 7$ vilket ger $M = 4$.