HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Fredagen den 28 oktober 2022
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$2\cos^2 x + \sin x = 2.$$

(b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*3p*)

$$A: \ \frac{x^3+x^2-x}{x-2} \leq x, \qquad B: \ 2^{x-2} \leq 1, \qquad C: \ x^3 < 8.$$

2. (a) Skriv talet

$$z = \frac{i(1+i\sqrt{3})}{1-i}$$

på polär form samt talet z^6 på rektangulär form. (*2p*)

(b) Ekvationen

$$z^6 + z^4 - 16z^2 - 16 = 0$$

har roten i. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. (*3p*)

3. (a) Hur många olika ”ord” med 12 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”TROLLERILÅDA”

om varje bokstav ska användas en gång och:
1) Alla ord ska avslutas med “LÅDA”?
2) Ordet “TROLL” får inte ingå som en del av orden dvs. ord av typen IRÅLATROLLED ska inte räknas med?

Svaren får vid behov innehålla fakulteter. (*2p*)

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2 \cdot 3^n - 1, \\ y_0 = 0, \ y_1 = 1. \end{cases}$$

4. (a) Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (*2p*)

(b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} (2^{1-k} + 2(k-1)) = 1 + \frac{5}{2} + \frac{17}{4} + \cdots + 2^{1-n} + 2(n-1) = 2 - 2^{1-n} + n(n-1)$$

för alla heltal $n \geq 0$. (*3p*)

5. (a) Grafen G är öglefri, sammanhängande och har 6 noder och 12 bågar. Minst 4 av noderna har grad 4 och de resterande 2 noderna har båda samma grad. Är denna information tillräcklig för att avgöra om G är en (*2p*)
1) Eulergraf?
2) Hamiltongraf?

(b) Spelingenjören Pelle är på casino och spelar poker. Han vinner totalt 40 marker bestående av vita (värde 6 kr), röda (värde 15 kr) och blåa (värde 45 kr). Pelle hävdar att han vunnit totalt 500 kr medan casinoingenjören Sara menar att han räknat fel och i själva verket bara har vunnit marker för 480 kr. Avgör vem av dem som har rätt och bestäm sedan det största antalet röda marker Pelle kan ha vunnit. (*3p*)

6. I tärningsingenjören Kajsas populära spel kastar spelaren en vanlig tärning 7 gånger. Vad är sannolikheten för att

(a) minst en sexa kommer upp? (*1p*)
(b) summan av tärningarnas resultat är mindre än 13? (*2p*)
(c) alla sex sidorna kommer upp? (*2p*)

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Trigonometriska ettan följt av faktorisering ger direkt

$$2\cos^2 x + \sin x = 2(1-\sin^2 x) + \sin x = 2 \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ eller } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = n\pi,\ x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi.$$

(b) A : Vi samlar alla termer på vänster sida om olikhetstecknet, gör liknämnigt, faktoriserar och gör teckenstudium:

$$\frac{x^3+x^2-x}{x-2} \leq x \Leftrightarrow \frac{x^3+x^2-x}{x-2} - x = \frac{x^3+x^2-x-x(x-2)}{x-2} = \frac{x^3+x}{x-2} = \frac{x(x^2+1)}{x-2} \leq 0.$$

Faktorn $x^2+1>0$ påverkar inte tecknet och tas därför inte med i teckenstudiet:

x		0		2	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x(x^2+1)}{x-2}$	$+$	0	$-$	$*$	$+$

Olikheten är alltså uppfylld för $0 \leq x < 2$.
$B : 2^{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$
$C : x^3 < 8 \Leftrightarrow x < 2.$
De implikationer som gäller är därför: $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$ och $C \Rightarrow B$.

2. (a) Vi börjar med att skriva z på polär form ($z = re^{i\theta}$):

$$r = |z| = \left|\frac{i(1+i\sqrt{3})}{1-i}\right| = \frac{|i||1+i\sqrt{3}|}{|1-i|} = \frac{1\cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\theta = \arg z = \arg\left(\frac{i(1+i\sqrt{3})}{(1-i)}\right) = \arg(i) + \arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(1-i) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{13\pi}{12},$$

dvs $z = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$. Vi får nu

$$z^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}\right)^6 = \sqrt{2}^6 e^{i6\frac{13\pi}{12}} = 8e^{i\frac{13\pi}{2}} = 8e^{i\left(\frac{\pi}{2}+3\cdot 2\pi\right)} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i.$$

(b) Polynomet i vänsterledet har reella koefficienter och därför är även konjugatet till i, dvs. $-i$, en rot. Enligt Faktorsatsen har då polynomet faktorn

$$(z-i)(z-(-i)) = z^2+1.$$

Polynomdivision tillsammans med konjugatregeln ger nu

$$z^6+z^4-16z^2-16 = (z^2+1)(z^4-16) = (z^2+1)(z^2+4)(z^2-4) = (z^2+1)(z+2)(z-2)(z^2+4)$$

där den sista faktorn har nollställena $z = \pm 2i$. Sammanfattningsvis är rötterna till den ursprungliga ekvationen $z = \pm i$, $z = \pm 2$ samt $z = \pm 2i$.

3. (a) 1) Om alla ord ska avslutas med ”LÅDA” kan vi plocka bort dessa bokstäver och har då kvar bokstäverna i ”TROLLERI”. Om dessa åtta bokstäver varit olika hade vi kunnat bilda 8! olika ord men eftersom vi har två L och två R och dessa kan vardera permuteras på 2! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi totalt

$$\frac{8!}{2!2!} = 10080 \text{ olika ord.}$$

2) Vi beräknar först hur många ord som innehåller ordet ”TROLL”. Eftersom bokstäverna ska stå intill varandra i den ordningen kan vi betrakta dem som en bokstav $\mathcal{T}$ dvs. vi har totalt 8 unika bokstäver ($\mathcal{T}$ERILÅDA) av vilka vi kan bilda totalt 8! olika ord.
Totala antalet ord med 12 bokstäver är 12!/(3!2!) eftersom vi har tre L och två R. Antalet ord som inte innehåller TROLL ges därför av

$$\text{totala antalet ord} - \text{antalet ord som innehåller TROLL} = \frac{12!}{3!2!} - 8! = 39876480.$$

(b) Den allmänna lösningen till den linjära differensekvationen

$$\mathcal{L}(y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 2 \cdot 3^n - 1 \tag{1}$$

ges av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation $\mathcal{L}(y_n) = 0$ och y_{pn} *en* partikulärlösning till (1).

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ är $r_1 = 2$ och $r_2 = 1$ vilket ger

$$y_{hn} = C_1 2^n = C_2 1^n = C_1 2^n + C_2.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
Eftersom högerledet $2 \cdot 3^n - 1$ är en summa av en exponentialfunktion $(2 \cdot 3^n)$ och ett nolltegradspolynom (konstant $= -1$) och differensekvationen är linjär kan partikulärlösningen skrivas som:

$$y_{pn} = y_{p_1n} + y_{p_2n}$$

där y_{p_1n} är en lösning till $\mathcal{L}(y_n) = 2 \cdot 3^n$ och y_{p_2n} en lösning till $\mathcal{L}(y_n) = -1$.

- Ansats 1: $y_{p_1n} = A3^n$ (samma typ av exponentialfunktion som i HL, ingår inte i y_{hn})
Insättning ger:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= A3^{n+2} - 3A3^{n+1} + 2A3^n = A3^n(9 - 9 + 2) \\ &= 2A3^n = 2 \cdot 3^n \Leftrightarrow A = 1. \end{aligned}$$

- Ansats 2: Standardansatsen för ett polynom av grad 0 är ett polynom av samma grad dvs. en konstant a. Den ansatsen kommer dock inte att fungera i det här fallet eftersom y_{hn} också innehåller en konstant (C_2). Vi gör därför ansatsen $y_{p_2n} = an$ och insättning ger då:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= a(n+2) - 3a(n+1) + 2an \\ &= a((1 - 3 + 2)n + 2 - 3) = -a = -1 \Leftrightarrow a = 1. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n = y_{hn} + y_{p_1n} + y_{p_2n} = C_1 2^n + C_2 + 3^n + n.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 2^0 + C_2 + 3^0 + 0 = C_1 + C_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -1 - C_1, \\ y_1 &= C_1 2^1 + C_2 + 3^1 + 1 = 2C_1 - 1 - C_1 + 3 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = -2 \Rightarrow C_2 = 1. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är därför $y_n = 3^n - 2^{n+1} + n + 1$.

4. (a) Vi söker en formel för den geometriska summan:

$$S = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \text{ där } x \neq 1.$$

Vi har

$$\begin{aligned} xS &= x(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) = \underbrace{x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n}_{S-1} + x^{n+1} = S - 1 + x^{n+1} \\ &\Leftrightarrow S(x-1) = x^{n+1} - 1 \underset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} S = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

(b) Här kan vi förstås göra att induktionsbevis men om vi istället utnyttjar formlerna för aritmetisk och geometrisk summa får vi direkt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (2^{1-k} + 2(k-1)) &= 2\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2\sum_{k=1}^{n} k - 2\sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} + 2\frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1) \\ &= -2 \cdot 2^{-n} + 4 + n(n+1) - 2n - 2 = 2 - 2^{1-n} + n(n-1). \end{aligned}$$

5. (a) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av nodernas gradtal lika med 2 gånger antalet bågar. Eftersom minst 4 av de 6 noderna har grad 4 och de resterande 2 har samma grad (g) får vi därför:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 4 \cdot 4 + 2g = 2 \cdot 12 \Leftrightarrow g = 4$$

dvs. de resterande två noderna har också grad 4.

1) Enligt Euler-Hierholzers sats innehåller G en Eulercykel om och endast om den är sammanhängande och samtliga noder har jämnt gradtal. Vi kan därför i det här fallet dra slutsatsen att G måste vara en Eulergraf och svaret på frågan är alltså ja.

2) Här kan vi utnyttja Ore's sats: G är öglefri och eftersom alla noder har samma gradtal och G är sammanhängande gäller

$$\deg(x) + \deg(y) = 4 + 4 \geq \text{antal noder} = 6$$

för två godtyckliga noder x och y som inte är grannar. Svaret på frågan är alltså även här ja, G är en Hamiltongraf.

(b) Vi sätter $v =$ antalet vita, $r =$ antal röda och $b =$ antalet blåa marker och söker de icke-negativa heltalslösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 6v + 15r + 45b = s & (1) \\ v + r + b = 40 & (2) \end{cases}$$

Eftersom $\text{sgd}(6, 15, 45) = 3$ måste även s vara delbart med 3 för att (1) ska ha heltalslösning. Detta är korrekt för $s = 480$ men inte för $s = 500$. Pelle kan därför inte ha vunnit 500 kr.

(2) ger $v = 40 - r - b$ vilket insatt i (1) med $s = 480$ efter förenkling ger den diofantiska ekvationen

$$3r + 13b = 80.$$

Eftersom $\text{sgd}(3, 13) = 1$ har ekvationen heltalslösning och den allmänna lösningen ges av

$$(r, b) = (80r_0 + 13n, 80b_0 - 3n),\ n \in \mathbb{Z}$$

där (r_0, b_0) är en lösning till hjälpekvationen $3r + 13b = 1$. Eftersom $\text{sgd}(3, 13) = 1$ kan vi hitta en sådan med hjälp av Euklides algoritm som bara blir en rad i det här fallet:

$$13 = 4 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow 1 = 13 - 4 \cdot 3 = 3 \cdot (-4) + 13 \cdot 1.$$

Vi kan alltså välja $(r_0, b_0) = (-4, 1)$ och den allmänna lösningen ges nu av:

$$(r, b) = (-320 + 13n, 80 - 3n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

vilket ger $v = 40 - r - b = 280 - 10n$. De icke-negativa heltalslösningarna bestäms genom

$$\begin{cases} v \geq 0 \Leftrightarrow 280 - 10n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{280}{10} = 28 \\ r \geq 0 \Leftrightarrow -320 + 13n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{320}{13} = 24.6... \\ b \geq 0 \Leftrightarrow 80 - 3n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{80}{3} = 26.6... \end{cases} \Leftrightarrow 25 \leq n \leq 26.$$

Sara har rätt och Pelle har vunnit 480 kr. Det största värdet på r bestäms av det största möjliga värdet på n. Pelle kan alltså ha vunnit maximalt $-320 + 13 \cdot 26 = 18$ röda marker.

6. (a) Enligt multiplikationsprincipen finns totalt 6^7 olika utfall när vi kastar en tärning 7 gånger. Antalet utfall med minst en 6:a = totala antalet utfall − antalet utfall utan en 6:a = $6^7 - 5^7$. Sannolikheten för att vi får minst en 6:a ges alltså av

$$\frac{6^7 - 5^7}{6^7} \approx 0.72$$

(b) Sätter vi $x_i =$ resultatet som kast nr i ger söker vi antalet heltalslösningar till olikheten

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 \leq 12$$

sådana att $1 \leq x_i \leq 6$. Vi konstaterar först att vi inte behöver ta särskild hänsyn till kravet $x_i \leq 6$ eftersom det största värdet på en av variablerna inträffar då de övriga sex antar sitt minsta värde (1). Det största möjliga värdet på en variabel för att olikheten ska vara uppfylld är alltså 6 vilket också är största möjliga resultat vid ett kast. Sätter vi nu $y_i = x_i - 1$ söker vi därför de icke-negativa heltalslösningarna till olikheten

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + \cdots + y_7 + 1 \leq 12$$
$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + \cdots + y_7 \leq 5$$

Vi inför nu till sist hjälpvariabeln $y_8 \geq 0$ och inser att det sökta antalet lösningar till olikheten ovan ges av antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_7 + y_8 = 5$$

eftersom y_8 ökar från 0 till 5 när summan av de övriga minskar från 5 till 0. Antalet gynnsamma utfall ges därför av

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{8+5-1}{5} = \binom{12}{5}$$

och sannolikheten för att summan av tärningarnas resultat är mindre än 13 är

$$\frac{\binom{12}{5}}{6^7} \approx 0.0028.$$

(c) Att alla sidorna kommer upp någon gång är ekvivalent med att en av sidorna kommer upp två gånger och de andra 5 sidorna kommer upp en gång. Det finns 7! olika sätt att permutera 7 olika objekt men här är 2 objekt lika dvs antalet olika sätt att få upp alla sidorna och t ex 1:an två gånger är $7!/2!$. Samma sak gäller om $2, 3, ..., 6$ kommer upp två gånger. Vi får alltså $6 \cdot 7!/2!$ gynnsamma utfall och sannolikheten för att alla sidor kommer upp är därför

$$\frac{6 \cdot \frac{7!}{2!}}{6^7} \approx 0.054$$