HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Fredagen den 27 oktober 2023
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 3.$$

(b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*3p*)

$$A:\ |x+2| - |x| \geq x, \qquad B:\ \ln(x-1) \leq 0, \qquad C:\ x^2 < 4.$$

2. (a) Hur många olika "ord" med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

"MATTETENTA" ?

Vad blir svaret på frågan om ordet "MATTE" inte får ingå som en del av orden dvs. om ord av typen "ET{MATTE}NAT" inte ska räknas med? Båda svaren får innehålla fakulteter. (*2p*)

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2n, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 0. \end{cases}$$

3. (a) Formulera och bevisa faktorsatsen. (*2p*)

(b) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} 3k(k+1) = 6 + 18 + 36 + 60 + \cdots + 3n(n+1) = n(n+1)(n+2)$$

för alla heltal $n \geq 1$. (*3p*)

4. (a) Skriv talen $z_{1,2} = 1 \pm i$ på polär form. Beräkna därefter talen z_1^4 och z_2^4 och ange resultatet på rektangulär form. (*2p*)

(b) Ekvationen

$$z^6 + z^4 + 4z^2 + 4 = 0$$

har roten $-i$. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. (*3p*)

5. (a) Grafen G är sammanhängande och har 12 bågar. 4 av noderna har grad 4 och de resterande noderna har alla samma grad. Är det möjligt att G är både en Eulergraf och en Hamiltongraf? (*2p*)

(b) Husdjursingenjören Kajsa har tre sorters djur hemma i sitt hus: Ormar, katter och papegojor. Vid ett tillfälle när Kajsa och hennes pojkvän Kalle var ensamma med alla Kajsas husdjur fanns det totalt 30 huvuden och 64 fötter i huset. Vilket är det största möjliga sammanlagda antalet katter och papegojor som då fanns i huset?
Ledning: Alla varelser i huset hade vid det aktuella tillfället varsitt huvud. Ormarna hade inga fötter, katterna hade fyra och Kajsa, Kalle och papegojorna hade två. (*3p*)

6. (a) Bestäm först $\phi(187)$ och beräkna därefter 5^{322} mod 187. (*2p*)

(b) På sjörövaringenjören Pelle Skräcks skepp finns det tre master. Pelle har 5 flaggor i olika färger som han kan hänga upp under varandra i masterna för att skicka signaler till sina elaka sjörövarkollegor. Varje mast har plats för alla 5 flaggorna. Hur många olika signaler kan Pelle skicka om minst 1 av de 5 flaggorna används för varje signal? Svaret ska anges på beräknad form som ett heltal. (*3p*)

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Ekvationen är en andragradsekvation i $\sin x$:

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 2(1-\sin^2 x) + 3\sin x = 3 \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ eller } \sin x = 1.$$

Lösningarna ges nu av:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi$$
$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi.$$

(b) A : Vi har:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -(x+2), & x < -2 \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

och vi löser därför olikheten i tre intervall:

x	$x < -2$	-2	$-2 \leq x < 0$	0	$x \geq 0$
	$\lvert x+2\rvert - \lvert x\rvert \geq x$ $\Leftrightarrow -(x+2) - (-x) \geq x$ $\Leftrightarrow x \leq -2$ Uppfyllt för alla x i intervallet!		$\lvert x+2\rvert - \lvert x\rvert \geq x$ $\Leftrightarrow x+2-(-x) \geq x$ $\Leftrightarrow x \geq -2$ Uppfyllt för alla x i intervallet!		$\lvert x+2\rvert - \lvert x\rvert \geq x$ $\Leftrightarrow x+2-x \geq x$ $\Leftrightarrow x \leq 2$

$$\therefore |x+2| - |x| \geq x \Leftrightarrow x \leq 2.$$

B : $\ln(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$.
C : $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.
De implikationer som gäller är alltså: $B \Rightarrow A$ och $C \Rightarrow A$.

2. (a) Om alla 10 bokstäver i ordet ”MATTETENTA” varit olika hade vi kunnat bilda 10! olika ord men eftersom vi har 4 T:n, 2 E:n och 2 A:n, och dessa kan permuteras på 4!, 2! respektive 2! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi totalt

$$\frac{10!}{4!2!2!} = 37800 \text{ olika ord.}$$

Vi noterar nu att:

Antalet ord utan ”MATTE” = totala antalet ord − antalet ord som innehåller ”MATTE”

och beräknar därför hur många ord som innehåller ordet ”MATTE”. Eftersom bokstäverna ska stå intill varandra i den ordningen kan vi betrakta dem som en bokstav $\mathcal{M}$ dvs. vi har totalt 6 bokstäver ($\mathcal{M}$TENTA) av vilka vi kan bilda totalt 6!/2! olika ord eftersom vi har två T:n. Antalet ord som inte innehåller MATTE ges därför av

$$\frac{10!}{4!2!2!} - \frac{6!}{2!} = 37800 - 360 = 37440.$$

(b) Den allmänna lösningen ges av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation (HL = 0) och y_{pn} en partikulärlösning till den givna differensekvationen.

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ är $r_1 = 2$ och $r_2 = 1$ vilket ger

$$y_{hn} = C_1 2^n + C_2 1^n = C_1 2^n + C_2.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
Högerledet $2n$ är ett förstagradspolynom men standardansatsen $An + B$ fungerar inte här eftersom y_{hn} också innehåller en konstantterm (C_2). Vi gör därför istället ansatsen

$$y_{pn} = n(An + B) = An^2 + Bn.$$

Insättning ger:

$$
\begin{aligned}
y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= A(n+2)^2 + B(n+2) - 3(A(n+1)^2 + B(n+1)) + 2(An^2 + Bn) \\
&= n^2(A - 3A + 2A) + n(4A + B - 6A - 3B + 2B) + 4A + 2B - 3A - 3B \\
&= n(-2A) + A - B = 2n \Leftrightarrow A = B = -1.
\end{aligned}
$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 2^n + C_2 - n^2 - n.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$
\begin{aligned}
y_0 &= C_1 2^0 + C_2 - 0^2 - 0 = C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 - C_1 \\
y_1 &= C_1 2^1 + C_2 - 1^2 - 1 = 2C_1 + 1 - C_1 - 2 = C_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 1 \Rightarrow C_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y_n = 2^n - n^2 - n.$$

3. (a) Faktorsatsen: Om $f(x)$ är ett polynom så är

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = q(x)(x - \alpha)$$

där $q(x)$ är ett polynom med $\text{grad}(q) = \text{grad}(f) - 1$.

Bevis:

i. $(\Rightarrow)$ Dividerar vi $f(x)$ med $x - \alpha$ får vi

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x) \quad (*)$$

där r enligt divisionsalgoritmen är ett polynom med $\text{grad}(r) < \text{grad}(x - \alpha) = 1$ dvs en konstant C. $x = \alpha$ i $(*)$ $\Rightarrow$

$$0 = f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + C = C \Rightarrow f(x) = q(x)(x - \alpha).$$

ii. $(\Leftarrow)$ $\quad f(x) = q(x)(x - \alpha) \Rightarrow f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0.$

(b) Vi gör ett induktionsbevis.

Påstående: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k(k+1) = 6 + 18 + 36 + \ldots + 3n(n+1) = n(n+1)(n+2)$ för alla heltal $n \geq 1$.

i. Basfallet: För $n = 1$ har vi:

$$
\begin{aligned}
&\text{VL}_{n=1} = 3 \cdot 1(1+1) = 6 \\
&\text{HL}_{n=1} = 1(1+1)(1+2) = 6 = \text{VL}_{n=1}
\end{aligned}
$$

dvs. påståendet är sant för $n = 1$.

ii. Induktionssteget: Antag att påståendet är sant för $n = p \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{p} 3k(k+1) = 6 + 18 + 36 + \cdots + 3p(p+1) = p(p+1)(p+2) \leftarrow \text{Induktionsantagandet (i.a.)}$$

För $n = p + 1$ får vi då

$$
\begin{aligned}
\text{VL}_{n=p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} 3k(k+1) = \underbrace{6 + 18 + \ldots + 3p(p+1)}_{\text{VL}_{n=p}} + 3(p+1)(p+2) \\
&\overset{\text{i.a}}{=} \underbrace{p(p+1)(p+2)}_{\text{HL}_{n=p}} + 3(p+1)(p+2) = (p+1)(p+2)(p+3) = \text{HL}_{n=p+1}
\end{aligned}
$$

Sammanfattning: Påståendet är sant för $n = 1$ och om det är sant för $n = p$ är det också sant för $n = p + 1$. Enligt Induktionsaxiomet är därför påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

4. (a) Vi börjar med att skriva talen $z_{1,2}$ på polär form ($z = re^{i\theta}$):

$$r = |z_{1,2}| = |1 \pm i| = \sqrt{1^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \arg(1 \pm i) = \pm\frac{\pi}{4}$$

dvs $z_{1,2} = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$. Vi får nu

$$z_{1,2}^4 = \left(\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4 e^{\pm i4\frac{\pi}{4}} = 4e^{\pm i\pi} = 4e^{i\pi} = -4.$$

(b) Eftersom $z_0 = -i$ är en rot och den algebraiska ekvationen har reella koefficienter är även $\bar{z}_0 = i$ en rot. Enligt Faktorsatsen är därför $(z+i)(z-i) = z^2+1$ en faktor i polynomet i ekvationens vänsterled. Polynomdivision ger nu den faktoriserade ekvationen

$$z^6 + z^4 + 4z^2 + 4 = (z^2+1)(z^4+4) = 0.$$

Den binomiska ekvationen $z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4$ kan vi lösa genom att direkt gå över till polär form eller genom att först använda konjugatregeln: $(z^4+4) = (z^2+2i)(z^2-2i)$ och sedan lösa de båda binomiska ekvationerna $z^2 = \pm 2i$. Det behövs dock inte i det här fallet. 4a ovan har redan gett oss två rötter: $1 \pm i$ och eftersom rötterna till en binomisk ekvation av grad 4 bildar en regelbunden 4-hörning i det komplexa talplanet får vi direkt att $\pm 1 + i$ är de två andra rötterna. Sammanfattningsvis har den ursprungliga ekvationen rötterna $z = \pm i$ och $z = \pm(1 \pm i)$.

Anm: Ett alternativt sätt att lösa ekvationen är att sätta $t = z^2$ vilket ger tredjegradsekvationen $t^3 + t^2 + 4t + 4 = 0$. Gissning ger roten $t = -1$ (som motsvarar $z_{1,2} = \pm i$) och polynomdivision med faktorn $t+1$ ger

$$t^3 + t^2 + 4t + 4 = (t+1)(t^2+4) = 0$$

vilket innebär att de två andra rötterna är $\pm 2i$. Ekvationerna $t = z^2 = \pm 2i$ kan nu t.ex. lösas genom insättning av ansatsen $z = a+ib$ vilket ger de resterande 4 rötterna till den ursprungliga ekvationen.

5. (a) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av nodernas gradtal lika med 2 gånger antalet bågar. Eftersom 4 noder har grad 4 och de resterande (n) noderna alla har samma grad (g) får vi därför:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 4 \cdot 4 + ng = 2 \cdot 12 \Leftrightarrow ng = 8$$

dvs. $(n,g) = (1,8)$, $(2,4)$, $(4,2)$ eller $(8,1)$. För $(n,g) = (1,8)$ är dock G en multigraf.

1) Enligt Euler-Hierholzers sats innehåller G en Eulercykel om och endast om den är sammanhängande och samtliga noder har jämnt gradtal. Detta betyder att för alternativen $(n,g) = (2,4)$ och $(4,2)$ är G en Eulergraf.

2) Här kan vi utnyttja Ore's sats: Om G är en sammanhängande, öglefri graf med $n \geq 3$ noder och

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n$$

för varje par av noder x och y som inte är grannar så är G en Hamiltongraf. Om G är öglefri och $(n,g) = (2,4)$ (vilket innebär att G är en Eulergraf enligt 1) är förutsättningarna i satsen uppfyllda eftersom alla noder då har grad 4 och antalet noder är 6.

Svaret på frågan är alltså ja, G kan vara både en Eulergraf och en Hamiltongraf.

(b) Vi sätter o = antal ormar, k = antal katter, p = antal papegojor och söker de positiva heltalslösningarna till

$$\begin{cases} o + k + p + 2 = 30 & \text{(antal huvuden)} \quad (1) \\ 4k + 2(p+2) = 64 & \text{(antal fötter)} \quad (2) \end{cases}$$

där Kajsas och Kalles huvuden och fötter är inräknade. Förenkling av ekvation (2) ger den diofantiska ekvationen

$$2k + p = 30.$$

Eftersom ekvationen redan är förenklad så långt som möjligt ($\text{sgd}(2,1) = 1$) är den allmänna lösningen $(k,p) = (30k_0 - n \cdot 1, 30p_0 + n \cdot 2)$ där (k_0, p_0) är en lösning till hjälpekvationen

$2k+p=1$. Vi ser direkt att $(k_0,p_0)=(1,-1)$ löser denna och den allmänna lösningen ges därför av:

$$(k,p)=(30-n,-30+2n) \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ekvation (1) ger nu $o=28-k-p=28-n$ och de positiva heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{array}{l} o>0 \Leftrightarrow 28-n>0 \Leftrightarrow n<28 \\ k>0 \Leftrightarrow 30-n>0 \Leftrightarrow n<30 \\ p>0 \Leftrightarrow -30+2n>0 \Leftrightarrow n>15 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 16\le n\le 27$$

Vi har $k+p=30-n-30+2n=n$. Maximering av det sammanlagda antalet katter och papegojor innebär därför att vi ska välja största möjliga n dvs.

$$(k+p)_{\max}=27.$$

Det största sammanlagda antalet katter och papegojor är alltså 27 vilket vi får om Kajsa har 1 orm, 3 katter och 24 papegojor.

6. (a) Om p och q är två olika primtal är $\phi(pq)=(p-1)(q-1)$. Eftersom $187=17\cdot 11$ (dvs en produkt av två olika primtal) får vi direkt att $\phi(187)=(17-1)(11-1)=160$.
Eftersom $\operatorname{sgd}(5,187)=1$ ger Eulers sats att $5^{\phi(187)}\equiv 1 \pmod{187}$ och vi får därför

$$5^{322}=5^{160}\cdot 5^{160}\cdot 5^2\equiv 1\cdot 1\cdot 5^2=25 \pmod{187}$$

dvs $5^{322} \bmod 187=25$.

(b) Vi beräknar först på hur många sätt vi kan fördela antalet flaggor på masterna. Om vi har 3 master och r flaggor av 5 ska användas söker vi antalet icke-negativa heltalslösningar till

$$x_1+x_2+x_3=r, \quad x_i= \text{ antal flaggor i mast } i,$$

vilket ges av $\binom{3+r-1}{r}=\binom{r+2}{r}$. För varje sådan konfiguration ska vi sedan placera ut r st flaggor av 5 där ordningen (flaggornas position) är av betydelse dvs. vi söker antalet permutationer av r element bland 5 vilket ges av $\frac{5!}{(5-r)!}$. Om Pelle använder minst 1 av de 5 flaggorna har han därför tillgång till

$$\sum_{r=1}^{5}\binom{r+2}{r}\frac{5!}{(5-r)!}=\binom{3}{1}\frac{5!}{4!}+\binom{4}{2}\frac{5!}{3!}+\binom{5}{3}\frac{5!}{2!}+\binom{6}{4}\frac{5!}{1!}+\binom{7}{5}\frac{5!}{0!}=5055 \text{ olika signaler.}$$