HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Torsdagen den 31 oktober 2024
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Är utsagan $(A \Rightarrow \neg B) \vee A$ en tautologi? (*1p*)

   (b) Lös ekvationen (*2p*)
   $$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\,.$$

   (c) Skriv talen
   $$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$
   på polär form och talen $z_{1,2}^3$ på rektangulär form. (*2p*)

2. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*2p*)
   $$A: \frac{x^3 + x^2}{x-1} \leq x, \qquad B: \ln x < 0, \qquad C: |x| < 1.$$

   (b) Lös differensekvationen (*3p*)
   $$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 2, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 2. \end{cases}$$

3. (a) En skolklass består av 8 flickor och 7 pojkar. Klassen ska delta i en nationell matematiktävling och man ska därför ta ut ett lag med 5 elever som ska representera klassen. Enligt tävlingsreglerna ska varje lag bestå av minst 2 flickor och minst 2 pojkar. På hur många sätt kan man ta ut laget? Svaret ska anges på beräknad form dvs. som ett heltal. (*2p*)

   (b) Visa att
   $$\sum_{k=1}^{n} 4k^3 = 4 + 32 + 108 + \cdots + 4n^3 = n^2(n+1)^2$$
   för alla heltal $n \geq 1$. (*3p*)

4. (a) Grafen G är sammanhängande och har 10 bågar. Två av noderna har grad 4 och fyra har grad 2. De resterande noderna är fler än två och har alla samma grad. Rita en graf med dessa egenskaper. Är G en Eulergraf? (*2p*)

   (b) En kväll på studentpuben köpte Pelle och 10 av hans törstiga kursare öl och alkoholfri cider. Ölen kostade 33 kr/flaska, cidern 24 kr/flaska och alla köpte minst en flaska. När kvällen var slut blev notan 420 kr. Hur många flaskor öl kan Pelle högst köpt under kvällen? (*3p*)

5. (a) Formulera och bevisa faktorsatsen. (*2p*)

   (b) Ekvationen
   $$z^6 - z^5 + z^4 + 7z^3 - 8z^2 + 8z - 8 = 0$$
   har roten i samt ytterligare en rot som är lätta att gissa. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. (*3p*)

6. En binär sträng av längd $n \geq 1$ innehåller n st ettor och/eller nollor. Ett exempel på en sådan sträng av längd 8 är 01110010.

   (a) Hur många binära strängar med längd 8 som börjar med 1 innehåller exakt fyra 1:or? (*1p*)

   (b) Bestäm en rekursionsekvation för antalet binära strängar av längd n som innehåller minst två på varandra följande ettor. Beräkna därefter antalet sådana strängar för $n = 8$. (*4p*)

   Svaren ska i båda fallen anges på beräknad form.

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Vi gör en sanningsvärdestabell:

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow \neg B$	$(A \Rightarrow \neg B) \vee A$
S	S	F	F	S
S	F	S	S	S
F	S	F	S	S
F	F	S	S	S

Eftersom utsagan är sann oberoende av de ingående utsagornas sanningsvärden är den en tautologi.

(b) Här kan vi använda hjälpvinkelmetoden: Normering ger

$$\sin x - \cos x = \sqrt{1^2 + (-1)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\cos x\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\varphi \sin x + \sin\varphi\cos x\right) = \sqrt{2}\sin(x+\varphi).$$

En vinkel som uppfyller $\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ är $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ och vi får nu:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Anm: En alternativ lösningsmetod är att först skriva om ekvationen, sedan kvadrera och utnyttja trigonmetriska ettan för att få en andragradsekvation i $\cos x$:

$$\sin x = \cos x + \sqrt{2} \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (\cos x + \sqrt{2})^2 = \cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x + 2$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \sqrt{2}\cos x + \frac{1}{2} = \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + n\cdot 2\pi$$

där $-\frac{3\pi}{4} + n\cdot 2\pi$ är falska rötter eftersom

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4} + n\cdot 2\pi\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{4} + n\cdot 2\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \neq \sqrt{2}.$$

(c) Vi börjar med att skriva talen $z_{1,2}$ på polär form ($z = re^{i\theta}$):

$$r = |z_{1,2}| = |1 \pm i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = 2, \quad \theta = \arg(1 \pm i\sqrt{3}) = \pm\frac{\pi}{3}$$

dvs $z_{1,2} = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Vi får nu

$$z_{1,2}^3 = \left(2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 2^3 e^{\pm i3\frac{\pi}{3}} = 8e^{\pm i\pi} = 8e^{i\pi} = -8.$$

2. (a) A: Vi samlar alla termer på vänster sida om olikhetstecknet, gör liknämnigt, faktoriserar och gör teckenstudium:

$$\frac{x^3+x^2}{x-1}-x=\frac{x^3+x^2-x(x-1)}{x-1}=\frac{x(x^2+1)}{x-1}\le 0.$$

Faktorn $x^2+1>0$ och behöver därför inte tas med i teckenstudiet:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & 1 & \\ \hline x & - & 0 & + & + & + \\ x-1 & - & - & - & 0 & + \\ \dfrac{x(x^2+1)}{x-1} & + & 0 & - & * & + \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3+x^2}{x-1}\le x \Leftrightarrow 0\le x<1.$$

$B:\ \ln x<0\Leftrightarrow 0<x<1.$
$C:\ |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1.$
De implikationer som gäller är därför: $A\Rightarrow C,\ B\Rightarrow A$ och $B\Rightarrow C$.

(b) Den allmänna lösningen till den linjära differensekvationen

$$\mathcal{L}(y_n)=y_{n+2}-4y_{n+1}+3y_n=2 \tag{1}$$

ges av $y_n=y_{hn}+y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation $\mathcal{L}(y_n)=0$ och y_{pn} *en* partikulärlösning till (1).

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2-4r+3=0$ är $r_1=3$ och $r_2=1$ vilket ger

$$y_{hn}=C_1 3^n+C_2.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
Eftersom högerledet är en konstant (polynom av grad 0) är standardansatsen ett polynom av samma grad dvs. $y_{pn}=a$ men eftersom den ingår i y_{hn} kommer den inte att fungera och vi gör därför istället ansatsen $y_{pn}=an$. Insättning ger:

$$y_{n+2}-4y_{n+1}+3y_n=a(n+2)-4a(n+1)+3an=n(a-4a+3a)+2a-4a=-2a=2$$
$$\Leftrightarrow a=-1.$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n=y_{hn}+y_{pn}=C_1 3^n+C_2-n.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y_0&=C_1 3^0+C_2-0=C_1+C_2=1\Leftrightarrow C_2=1-C_1,\\ y_1&=C_1 3^1+C_2-1=3C_1+1-C_1-1=2C_1=2\Leftrightarrow C_1=1,\ C_2=0.\end{aligned}$$

Den sökta lösningen är därför

$$y_n=3^n-n.$$

3. (a) Här handlar det om urval utan hänsyn till ordningen och utan upprepning dvs. kombinationer. Antalet sätt att välja ut t.ex. 2 flickor bland 8 ges av $\binom{8}{2}$. Eftersom urvalet av pojkar är helt oberoende av urvalet av flickor ges totala antalet urval av fem elever där minst 2 är flickor och minst 2 är pojkar enligt additions- och multiplicationsprinciperna av

$$\begin{aligned}\binom{8}{2}\binom{7}{3}+\binom{8}{3}\binom{7}{2}&=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=4\cdot 7\cdot 7\cdot 5+8\cdot 7\cdot 7\cdot 3\\ &=7^2(4\cdot 5+8\cdot 3)=49\cdot 44=2156.\end{aligned}$$

(b) Vi gör ett induktionsbevis.

$$\text{Påstående: } \sum_{k=1}^{n} 4k^3 = 4 + 32 + 108 + \cdots + 4n^3 = n^2(n+1)^2 \text{ för alla heltal } n \geq 1.$$

i. Basfallet: För $n = 1$ har vi:

$$\begin{aligned} \mathrm{VL}_{n=1} &= 4 \cdot 1^3 = 4 \\ \mathrm{HL}_{n=1} &= 1^2(1+1)^2 = 4 = \mathrm{VL}_{n=1} \end{aligned}$$

dvs. påståendet är sant för $n = 1$.

ii. Induktionssteget: Antag att påståendet är sant för $n = p \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{p} 4k^3 = 4 + 32 + 108 + \cdots + 4p^3 = p^2(p+1)^2 \leftarrow \text{Induktionsantagandet (i.a.)}$$

För $n = p + 1$ får vi då

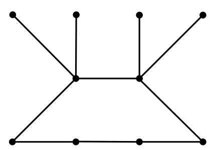
$$\begin{aligned} \mathrm{VL}_{n=p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} 4k^3 = \underbrace{4 + 32 + \cdots + 4p^3}_{\mathrm{VL}_{n=p}} + 4(p+1)^3 \overset{\text{i.a}}{=} \underbrace{p^2(p+1)^2}_{\mathrm{HL}_{n=p}} + 4(p+1)^3 \\ &= (p+1)^2(p^2 + 4p + 4) = (p+1)^2(p+2)^2 = \mathrm{HL}_{n=p+1} \end{aligned}$$

Sammanfattning: Påståendet är sant för $n = 1$ och om det är sant för $n = p$ är det också sant för $n = p + 1$. Enligt Induktionsaxiomet är därför påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

4. (a) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av nodernas gradtal lika med 2 gånger antalet bågar. Om resterande antal noder är n och samtliga av dessa har grad g får vi därför

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + n \cdot g = 2 \cdot 10 \Leftrightarrow ng = 4.$$

Eftersom $ng = 4$ och $n > 2$ är $(n, g) = (4, 1)$. Figur 1 visar en graf med dessa egenskaper.



Figur 1: En graf som uppfyller villkoren i uppgift 4a.

Enligt Euler-Hierholzers sats innehåller G en Eulercykel om och endast om samtliga noder har jämnt gradtal. Eftersom 4 av noderna har grad 1 är G inte en Eulergraf.

(b) Sätter vi x = antal öl och y = antal cider hittar vi svaret bland de icke-negativa heltalslösningarna till den diofantiska ekvationen

$$33x + 24y = 420 \Leftrightarrow 11x + 8y = 140.$$

Eftersom $\mathrm{sgd}(11, 8) = 1|140$ har ekvationen heltalslösning och den allmänna lösningen ges av

$$(x, y) = (140x_0 - 8n, 140y_0 + 11n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

där (x_0, y_0) är en lösning till hjälpekvationen $11x + 8y = 1$. Eftersom $\mathrm{sgd}(11, 8) = 1$ kan vi hitta en sådan med hjälp av Euklides algoritm:

$$\left.\begin{aligned} 11 &= 1 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = 3 - 2 = 11 - 8 - (8 - 2 \cdot 3) = 11 - 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 11 - 2 \cdot 8 + 2(11 - 8)$$

$$= 11 \cdot 3 + 8 \cdot (-4).$$

Vi kan alltså välja $(x_0, y_0) = (3, -4)$ och den allmänna lösningen ges nu av:

$$(x, y) = (420 - 8n, -560 + 11n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De icke-negativa heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{aligned} x \geq 0 \Leftrightarrow 420 - 8n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{420}{8} = 52.5 \\ y \geq 0 \Leftrightarrow -560 + 11n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{560}{11} = 50.9\ldots \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow n = 51 \text{ eller } n = 52.$$

$n = 51$ ger $(x, y) = (12, 1)$ medan $n = 52$ ger $(x, y) = (4, 12)$. Eftersom Pelle hade 10 kursare med sig ger första fallet maximalt $12 - 9 = 3$ öl till Pelle (och 9 öl och 1 cider till de andra) medan han i det andra fallet kan ha köpt alla 4 ölen. Pelle kan alltså maximalt ha köpt 4 öl under kvällen.

5. (a) Faktorsatsen: Om $f(x)$ är ett polynom så är

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = q(x)(x - \alpha)$$

där $q(x)$ är ett polynom med $\text{grad}(q) = \text{grad}(f) - 1$.

Bevis:

i. $(\Rightarrow)$ Dividerar vi $f(x)$ med $x - \alpha$ får vi

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x) \quad (*)$$

där r enligt divisionsalgoritmen är ett polynom med $\text{grad}(r) < \text{grad}(x - \alpha) = 1$ dvs en konstant C. $x = \alpha$ i $(*)$ $\Rightarrow$

$$0 = f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + C = C \Rightarrow f(x) = q(x)(x - \alpha).$$

ii. $(\Leftarrow)$ $f(x) = q(x)(x - \alpha) \Rightarrow f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0$.

(b) Eftersom polynomet i vänsterledet har reella koefficienter är även konjugatet $-i$ en rot. Gissning ger dessutom roten 1. Enligt faktorsatsen är därför $g(z) = (z + i)(z - i)(z - 1) = (z^2 + 1)(z - 1) = z^3 - z^2 + z - 1$ en faktor i $p(z) = z^6 - z^5 + z^4 + 7z^3 - 8z^2 + 8z - 8$. Polynomdivisionen $p(z)/g(z)$ ger

$$p(z) = (z^3 - z^2 + z - 1)(z^3 + 8).$$

Den binomiska ekvationen $z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -8$ kan lösas genom att gå över till polär form men det behövs dock inte i det här fallet eftersom 1c ovan redan har gett oss två rötter: $1 \pm i\sqrt{3}$. Vi inser direkt att -2 är den sista roten och vi kan också motivera det med att rötterna till en binomisk ekvation av grad 3 bildar en regelbunden 3-hörning i det komplexa talplanet. Sammanfattningsvis har den ursprungliga ekvationen rötterna $z = \pm i$, $z = 1$, $z = -2$ och $z = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Anm: Alternativa lösningsmetoder för ekvationen $z^3 + 8 = 0$:

1) Eftersom vi ser att -2 är en rot ger polynomdivision med $z + 2$ att

$$z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$$

där andragradsekvationen som motsvarar den andra faktorn nu enkelt kan lösas med *pq*-formeln vilket ger rötterna ovan.

2) Vi kan som sagt även använda standardmetoden för lösning av binomiska ekvationer, dvs gå över till polär form:

$$z^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3 e^{i3\theta} = -8 = 8e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rötterna till ekvationen $z^3 = -8$ ges därför av $z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2$, dvs

$$\begin{cases} z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3}, \\ z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\pi} = -2, \\ z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

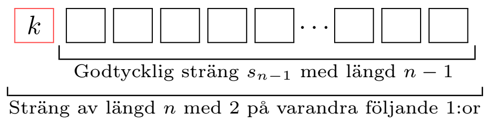
6. (a) Ska strängen börja med 1 behöver vi bara bestämma hur många binära strängar av längd 7 som innehåller tre 1:or. Om alla siffror varit olika hade vi kunnat bilda 7! olika strängar men eftersom vi nu har tre 1:or och resten (fyra) 0:or som kan permuteras på vardera 3! respektive 4! olika sätt utan att strängen ändras får vi totalt

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 7 \cdot 5 = 35 \text{ binära strängar.}$$

(b) Vi låter y_n beteckna antalet binära strängar med längd n som innehåller två på varandra följande 1:or och inser direkt att $y_1 = 0$ och $y_2 = 1$.

Antag nu att vi ska skapa en n-siffrig binär sträng för $n \geq 3$ som innehåller två på varandra följande 1:or genom att lägga till en siffra k (1 eller 0) till en godtycklig $(n-1)$-siffrig binär sträng s_{n-1} enligt figuren nedan. Det finns då tre fall:

- s_{n-1} innehåller två på varandra följande 1:or. Då kan k vara antingen 1 eller 0 vilket ger bidraget $2y_{n-1}$ till y_n.
- s_{n-1} innehåller inte två på varandra följande 1:or och börjar med 1 vilket innebär att 2:a siffran i s_{n-1} måste vara 0. Då måste k vara 1. Bidraget till y_n ges därför i det här fallet av antalet $(n-3)$-siffriga strängar som inte innehåller två på varandra följande 1:or dvs $2^{n-3} - y_{n-3}$.
- s_{n-1} innehåller inte två på varandra följande 1:or och börjar med 0. Då kan vi inte använda den strängen och det här fallet ger inget bidrag till y_n.



Antalet binära strängar av längd n om innehåller två på varandra följande 1:or ges alltså av rekursionsekvationen

$$\begin{cases} y_n = 2y_{n-1} + 2^{n-3} - y_{n-3}, \; n \geq 3. \\ y_1 = 0, \; y_2 = 1. \end{cases}$$

Vi kan nu enkelt bestämma y_8 rekursivt:

$$\begin{aligned}
y_3 &= 2y_2 + 2^0 - y_0 = 2 \cdot 1 + 1 - 0 = 3, \\
y_4 &= 2y_3 + 2^1 - y_1 = 2 \cdot 3 + 2 - 0 = 8, \\
y_5 &= 2y_4 + 2^2 - y_2 = 2 \cdot 8 + 4 - 1 = 19, \\
y_6 &= 2y_5 + 2^3 - y_3 = 2 \cdot 19 + 8 - 3 = 43, \\
y_7 &= 2y_6 + 2^4 - y_4 = 2 \cdot 43 + 16 - 8 = 94, \\
y_8 &= 2y_7 + 2^5 - y_5 = 2 \cdot 94 + 32 - 19 = 201.
\end{aligned}$$