MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om absolutbelopp

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

30 september 2024

Absolutbelopp

Definition

Definition 1 (Absolutbelopp)

Absolutbeloppet $|x|$ av det reella talet x definieras genom

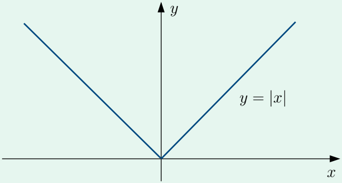
$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Exempel 1

$|5| = 5, \quad |-4| = -(-4) = 4, \quad |0| = 0$

Exempel 2

Grafen till funktionen $f(x) = |x|$:



Absolutbelopp

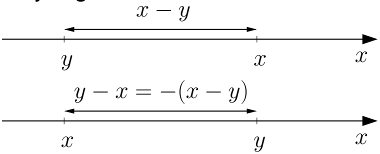
Geometrisk tolkning

Enligt definitionen har vi

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ -(x-y), & x < y \end{cases}$$

Avståndet mellan två punkter x och y på tallinjen ges av

$$\begin{cases} x - y \text{ om } x > y \\ y - x = -(x-y) \text{ om } y > x \end{cases}$$



$\therefore$ $|x-y|$ = avståndet mellan x och y.

Exempel 3

Lös ekvationen $|x-1| = 4$.

Lösning:

Vi söker de tal x vars avstånd till talet 1 är lika med 4:

$\Rightarrow x = 5$ eller $x = -3$.

Absolutbelopp
Geometrisk tolkning

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 4

Lös ekvationen $|2x+1| = 5$.

Lösning:

$|2x+1| = |2x-(-1)|$

$\Rightarrow$ avståndet mellan talet $2x$ och talet -1 ska vara 5

$\Rightarrow 2x = 4$ eller $2x = -6$

$\therefore x = 2$ eller $x = -3$

Alternativ algebraisk lösning med kvadrering:

$$\begin{aligned} |2x+1| &= 5 \underset{\text{OBS!}}{\Leftrightarrow} |2x+1|^2 = (2x+1)^2 = 4x^2+4x+1 = 25 \\ &\Leftrightarrow 4\left(x^2+x-6\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ eller } x = -3. \end{aligned}$$

Absolutbelopp

Räkneregler

Följande räkneregler gäller för absolutbelopp:

Sats 1

För alla reella tal x *och* y *gäller*

1. $|-x| = |x|$
2. $|x-y| = |y-x|$
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$
4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ y \neq 0.$

Absolutbelopp

Olikheter

Exempel 5

Vi har $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

Allmänt: $|x + a| < b \Leftrightarrow -b < x + a < b$

Exempel 6

Lös olikheten $|x - 2| < 3$

Lösning:
Vi söker de de x för vilka avståndet till talet 2 är mindre än 3:
$\therefore -1 < x < 5$.

Alternativ algebraisk lösning:

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$$

Absolutbelopp

Olikheter

Exempel 7

Lös olikheten $|2x+2| < 4$.

Lösning:

$$-4 < 2x + 2 < 4 \Leftrightarrow -6 < 2x < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$$

Exempel 8

För vilka x gäller olikheten $|x-1| > |2x+1|$?

Lösning:

Kvadrering:

$$\begin{aligned}
|x-1| &> |2x+1| \Leftrightarrow |x-1|^2 > |2x+1|^2 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 > (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\
&\Leftrightarrow 0 > 3x^2 + 6x = 3x\,(x+2) \\
&\Leftrightarrow -2 < x < 0
\end{aligned}$$

Absolutbelopp

Olikheter

Exempel 9

Bestäm de reella tal x för vilka $3x + |2x+1| > 6$.

Lösning:

Följande metod fungerar på alla ekvationer och olikheter med absolutbelopp:

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1), & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vi delar in de reella i talen i två intervall och löser olikheten i varje intervall:

$x < -\frac{1}{2}$	$x \geqslant -\frac{1}{2}$
$3x + \lvert 2x+1 \rvert > 6$ $\Leftrightarrow 3x - (2x+1) > 6$ $\Leftrightarrow x > 7$	$3x + \lvert 2x+1 \rvert > 6$ $\Leftrightarrow 3x + (2x+1) > 6$ $\Leftrightarrow 5x > 5 \Leftrightarrow x > 1$

Eftersom $x > 7$ ligger utanför aktuellt intervall kan vi bortse från den och $x > 1$ är därför enda lösningen.