

MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om differensekvationer

Mikael Hindgren



HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

11 september 2024

Exempel 1

En talföljd $\{y_n\}$ uppfyller

$$\begin{cases} y_{n+1} - 2y_n = 0 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$

Bestäm en formel för y_n .

$$y_{n+1} = 2y_n$$

$$\Rightarrow \{y_n\} = \{y_0, y_1, y_2, y_3, \dots\} = \{3, 6, 12, 24, \dots\} = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \dots\}$$

$$\therefore y_n = 3 \cdot 2^n$$

Test för $n = 3$: $y_3 = 3 \cdot 2^3 = 24$ OK!

Allmänt:

Differensekvationen $y_{n+1} + ay_n = 0$ har den allmänna lösningen $y_n = y_0(-a)^n$

Anm: Differensekvationer kallas också **rekurrenskvationer**.

Exempel 2 (Komplexitet för binär sökning)

- N_n = Antal element i en ordnad lista som kan genomsökas med högst n tester

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{n+1} = 2N_n \\ N_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_{n+1} - 2N_n = 0 \\ N_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow N_n = C \cdot 2^n$$

$$N_1 = C \cdot 2^1 = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow N_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow n - 1 = \log_2 N_n \Leftrightarrow n = \log_2(N_n) + 1$$

Komplexiteten för binär sökning = $\mathcal{O}(\log N)$

- Telefonkatalog med 1 miljon namn $\Rightarrow n = 19.93... + 1$
∴ högst 21 tester krävs!

Exempel 3

En talföljd $\{y_n\}$ uppfyller

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2\sqrt{y_n} \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

$$\{y_n\} = \{1, 2, 2 \cdot \sqrt{2}, 2 \cdot 2^{3/4}, 2 \cdot 2^{7/8}, 2 \cdot 2^{15/16}, 2 \cdot 2^{31/32}, 2 \cdot 2^{63/64}, 2 \cdot 2^{127/128}, \dots\}$$

$\Rightarrow y_n = ?$

Mathematica: $y_n = 4^{1-2^{-n}}$

Definition 1

En differensekvation är *linjär* om den kan skrivas på formen

$$\mathcal{L}(x_n) = h_n \quad (1)$$

där \mathcal{L} är en operator på talföljden $\{x_n\}$ med egenskapen

$$\mathcal{L}(ax_n + by_n) = a\mathcal{L}(x_n) + b\mathcal{L}(y_n) \quad a, b \text{ konstanter}$$

(1) kallas *homogen* om $h_n = 0$ annars *inhomogen*.

Av definitionen följer:

- Om x_n och y_n är två lösningar till en linjär differensekvation så är också $ax_n + by_n$ en lösning för alla tal a och b .
- Ex 1: $y_{n+1} = 2y_n$ är linjär.
- Ex 3: $y_{n+1} = 2\sqrt{y_n}$ är icke-linjär.

Exempel 4

- $x_{n+1} + 2nx_n = 2^n$ 1:a ordn, linjär och inhomogen
- $x_{n+2} + n^2x_{n+1} - 3x_n = 0$ 2:a ord, linjär, homogen
- $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 4x_{n+1} - 2x_n = 3^n + 2n$ 3:dje ordn, linjär, inhomogen
- $x_{n+2} + x_{n+1}^2 - 3x_n = 0$ 2:a ordn, icke-linjär

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 5

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0, \\ y_0 = 1, y_1 = 0. \end{cases}$$

- Vi söker alla lösningar dvs **den allmänna lösningen** till differensekvationen:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0, \quad p, q \text{ godtyckliga konstanter} \quad (2)$$

- Motsvarande 1:a ordningens ekvation $y_{n+1} + ay_n = 0$ hade den allmänna lösningen $y_n = C(-a)^n$
- Vi testar därför om $y_n = Cr^n$, är en lösning till (2)

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Insättning av $y_n = Cr^n$ i (2):

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = Cr^{n+2} + pCr^{n+1} + qCr^n = Cr^n(r^2 + pr + q) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_n = Cr^n = 0 \Leftrightarrow C = 0 \\ \text{eller} \\ r^2 + pr + q = 0 \quad \leftarrow \text{Karakteristisk ekvation} \end{cases}$$

Anm: En linjär homogen differensekvation har alltid en **trivial lösning** $y_n = 0$.

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Man kan visa:

Sats 1

Den homogena differensekvationen $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_n = \begin{cases} C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 n + C_2) r_1^n, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

där r_1 och r_2 är rötter till den karakteristiska ekvationen $r^2 + pr + q = 0$ och C_1 och C_2 godtyckliga konstanter.

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 1 (forts)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0, \\ y_0 = 1, y_1 = 0. \end{cases}$$

Sats 1

$$y_n = \begin{cases} C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 n + C_2) r_1^n, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

- Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 2$$

- Allmän lösning enligt Sats 1: $y_n = (C_1 n + C_2) 2^n$

- $y_0 = 1 \Rightarrow (C_1 \cdot 0 + C_2) 2^0 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$

- $y_1 = 0 \Rightarrow (C_1 \cdot 1 + C_2) 2^1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -1$

∴ Den sökta lösningen är $y_n = (1 - n) 2^n$.

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 2

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0 \\ y_0 = 0, y_1 = 1 \end{cases}$$

Sats 1

$$y_n = \begin{cases} C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 n + C_2) r_1^n, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

- Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$$

- Allmän lösning enligt Sats 1: $y_n = C_1 1^n + C_2 2^n = C_1 + C_2 2^n$

- $y_0 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 2^0 = C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -C_2$

- $y_1 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 2^1 = -C_2 + 2C_2 = C_2 = 1$

∴ Den sökta lösningen är $y_n = 2^n - 1$.

Mer om linjära differensekvationer

Sats 2

$$\mathcal{L}(x_n) = h_n \text{ och } \mathcal{L}(y_n) = g_n \Rightarrow \mathcal{L}(x_n + y_n) = h_n + g_n$$

Sats 3

Om y_{pn} är en lösning till

$$\mathcal{L}(y_n) = h_n \quad (3)$$

(partikulärlösning) så ges den allmänna lösningen till (3) av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y_n) = 0$.

Exempel 3

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = x_n \\ y_0 = 1, y_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

då a) $x_n = 2 \cdot 3^n$

b) $x_n = 2 \cdot 2^n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 3 (a)

1 $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$ enligt Ex 2

2 Ansats: $y_{pn} = A 3^n$. Insättning i (4):

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= A 3^{n+2} - 3A 3^{n+1} + 2A 3^n = A 3^n (9 - 9 + 2) \\ &= 2A 3^n = 2 \cdot 3^n \Leftrightarrow A = 1. \end{aligned}$$

$\therefore y_{pn} = 3^n$.

3 Allmän lösning enligt Sats 2: $y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 + C_2 2^n + 3^n$

4 $y_0 = C_1 + C_2 2^0 + 3^0 = C_1 + C_2 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = -C_2$

$$y_1 = C_1 + C_2 2^1 + 3^1 = C_1 + 2C_2 + 3 = -C_2 + 2C_2 + 3 = C_2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow C_1 = 3, C_2 = -3$$

\therefore Den sökta lösningen är $y_n = 3 - 3 \cdot 2^n + 3^n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 3 (b)

Samma metod som i (a) men ansatsen $y_{pn} = A2^n$ ingår nu i y_{hn} (är lösning till homogena ekvationen) och fungerar inte.

Ny ansats: $y_{pn} = An2^n$.

- Insättning i (4):

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= A(n+2)2^{n+2} - 3A(n+1)2^{n+1} + 2An2^n \\ &= A2^n((4-6+2)n + 8-6) = 2A2^n = 2 \cdot 2^n \\ \Leftrightarrow A &= 1. \end{aligned}$$

$$\therefore y_{pn} = n2^n.$$

- Allmän lösning enligt Sats 2: $y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 + C_22^n + n2^n$
 - $y_0 = C_1 + C_22^0 + 0 \cdot 2^0 = C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1 - C_2$
 $y_1 = C_1 + C_22^1 + 1 \cdot 2^1 = C_1 + 2C_2 + 2 = 1 - C_2 + 2C_2 + 2 = C_2 + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow C_1 = 4, C_2 = -3$
- \therefore Den sökta lösningen är $y_n = 4 + (n-3)2^n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 4

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2n + 1 \\ y_0 = 1, y_1 = 1 \end{cases}$$

Svar: $y_n = n + 2 - 2^n$

Exempel 5

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 4n + 4 \\ y_0 = 1, y_1 = 0 \end{cases}$$

Svar: $y_n = 3^n - n^2 - 2n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 6

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2 \cdot 3^n - 2n \\ y_0 = 0, y_1 = 1 \end{cases}$$

- Enligt Sats 2 är $y_n = y_{hn} + y_{p_1n} + y_{p_2n}$ allmän lösning till

$$\mathcal{L}(y_n) = y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2 \cdot 3^n - 2n$$

där y_{p_1n} och y_{p_2n} är partikulärlösningar till $\mathcal{L}(y_n) = 2 \cdot 3^n$ resp. $\mathcal{L}(y_n) = -2n$

- Enligt Ex 3 är $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$ och $y_{p_1n} = 3^n$
- Eftersom y_{hn} innehåller konstantterm (C_1) fungerar inte ansatsen $y_{p_2n} = an + b$. Ansatsen $y_{p_2n} = n(an + b) = an^2 + bn$ ger efter insättning i $\mathcal{L}(y_n) = -2n$ konstanterna $a = b = 1$
- Bestämning av C_1 och C_2 med hjälp av givna värden på y_0 och y_1 ger den sökta lösningen $y_n = 2 - 3 \cdot 2^n + 3^n + n^2 + n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Sammanfattning

Partikulärlösning y_{pn} till

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = h_n$$

1 $h_n = Ca^n$:

- $y_{pn} = Aa^n$ om inte y_{hn} innehåller sådan term
- $y_{pn} = Ana^n$ om $y_{hn} = C_1a^n + C_2b^n$
- $y_{pn} = An^2a^n$ om $y_{hn} = (C_1n + C_2)a^n$

2 $h_n = \text{polynom}$:

- $y_{pn} = \text{polynom } p(n)$ av samma grad som h_n om inte y_{hn} innehåller konst. term C
- $y_{pn} = np(n)$ om y_{hn} innehåller konstantterm C men inte Cn
- $y_{pn} = n^2p(n)$ om $y_{hn} = C_1n + C_2$

3 $h_n = f_n + g_n$: Använd sats 2

Exempel: Rekursiv algoritm för sortering

Exempel 7 (Bubble sort)

Bestäm effektiviteten = # jämförelser (y_n) som krävs för att sortera en lista

$$\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\} \quad (\text{Ex: } \{3, 5, 1, 6, 4\}, n = 5)$$

av n st reella tal i storleksordning mha "Bubble sort".

Rekursiv metod:

- Jfr t_1 med t_2 : $t_1 > t_2$ byt plats, $t_1 < t_2$ gör inget
- Jfr (ev nya) t_2 med t_3 : $t_2 > t_3$ byt plats, $t_2 < t_3$ gör inget
- \vdots
- Resultat: Totalt $n - 1$ jämförelser \Rightarrow Största talet längst till höger.
- Börja om med listan $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}\} \leftarrow$ nya värden.
 Ex: $\{3, 5, 1, 6, 4\}$. En runda ger $\{3, 1, 5, 4, 6\}$. Börja om med $\{3, 1, 5, 4\}$

Exempel: Rekursiv algoritm för sortering

Exempel 7 (Bubble sort forts)

Rekursionsformel:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + n - 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_n - y_{n-1} = n - 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

- $y_{hn} = C \cdot 1^n = C$ enligt tidigare
- Partikulärlösning: Ansats $y_{pn} = an^2 + bn$ eftersom y_{hn} innehåller C
- Allmän lösning: $y_n = y_{hn} + y_{pn} = C + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$. Villkoret $y_1 = 0$ ger $C = 0$.

$$\therefore y_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Anm: Totala antalet jämförelser:

$$y_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 1 = \{\text{Aritmetisk summa}\} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ Stämmer!}$$

Differensekvationer i Mathematica

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2 \cdot 3^n \\ y_0 = 0, y_1 = 1 \end{cases}$$

- Lösning till homogena ekv:

```
RSolve[y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]==0,y[n],n]
```

- Allmän lösning:

```
RSolve[y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]==2*3^n,y[n],n]
```

- Sökt lösning:

```
RSolve[{y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]==2*3^n,y[0]==0,y[1]==1},y[n],n]
```