MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om funktioner och relationer

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

30 september 2024

Funktionsbegreppet

Exempel 1

$f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x-3}$ och $y = \sin x$ är funktioner.

Exempel 2

Kan följande samband representeras av en funktion?

1. För varje fingeravtryck finns exakt en människa.
2. För varje människa med fingrar finns (minst) ett fingeravtryck.
3. a)

x	y
1	2
2	3
3	5
4	4

b)

x	y
1	± 1
9	± 5
6	± 9
8	± 7

c)

x	y
± 1	1
± 9	5
± 6	9
± 8	7

4. Billackeringsfirma: $\begin{cases} \text{Röd eller grön bil lackeras svart} \\ \text{Bilar i andra färger lackeras vita} \end{cases}$

Funktionsbegreppet

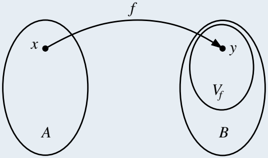
Vad är en funktion?

Definition 1

En regel som för varje element x i en mängd A ordnar exakt ett element y i en mängd B kallas en funktion från A till B:

$$f : A \to B$$

- $A =$ funktionens definitionsmängd (D_f)
- $B =$ funktionens målmängd
- $V_f =$ funktionens värdemängd $= \{y \in B;\ y = f(x),\ x \in A\}$



Anm: B är mängden av de värden som man har bestämt är tillåtna och $V_f \subseteq B$ är mängden är de värden som faktiskt antas.

Funktionsbegreppet

Exempel 2 (forts)

1. Funktion:
   - $A = D_f = \{\text{Alla fingeravtryck}\}$
   - $B = \{\text{Alla människor}\}$
   - $V_f = \{\text{Alla människor med fingrar}\}$
2. Ej funktion.
3. a) Funktion:
   $D_f = \{1, 2, 3, 4, \}$, $B = \mathbb{Z}$
   $V_f = \{2, 3, 5, 4\}$
   b) Ej funktion.
   c) Funktion:
   $D_f = \{\pm 1, \pm 9, \pm 6, \pm 8\}$
   $B = \mathbb{Z}$, $V_f = \{1, 5, 9, 7\}$
4. Funktion:
   $D_f = \{\text{Alla bilar}\}$
   $B = \{\text{Alla bilar}\}$
   $V_f = \{\text{Alla svarta och vita bilar}\}$

Definition 1

En regel som för varje element x i en mängd A ordnar exakt ett element y i en mängd B kallas en funktion från A till B:

$$f : A \to B$$

A = funktionens definitionsmängd (D_f)

B = funktionens målmängd

V_f = funktionens värdemängd $= \{y \in B;\ y = f(x),\ x \in A\}$

1. För varje fingeravtryck finns exakt en människa.
2. För varje människa med fingrar finns (minst) ett fingeravtryck.
3. a)

x	y
1	2
2	3
3	5
4	4

b)

x	y
1	± 1
9	± 5
6	± 9
8	± 7

c)

x	y
± 1	1
± 9	5
± 6	9
± 8	7

4. Billackeringsfirma: $\begin{cases} \text{Röd eller grön bil lackeras svart} \\ \text{Bilar i andra färger lackeras vita} \end{cases}$

Funktionsbegreppet

Exempel 3

$f(x) = \sqrt{x-3}, \quad D_f = [3, \infty), \quad B = \mathbb{R}, \quad V_f = [0, \infty)$

Olika beteckningar för samma funktion:

- $f : x \to \sqrt{x-3},\ x \geq 3$
- $y = \sqrt{x-3},\ x \geq 3$
- $f(\phi) = \sqrt{\phi - 3},\ \phi \geq 3$
- $f(\ ) = \sqrt{(\ ) - 3}, D_f = [3, \infty)$

Anm:

- Ofta anges inte definitionsmängden och då är D_f den största mängd för vilket funktionsuttrycket har mening.
  Skriver vi $f(x) = \frac{1}{x}$ innebär det att $V_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.
- Två funktioner $f : A \to B$ och $g : C \to D$ är lika omm $A = C$, $B = D$ och $f(x) = g(x)$ för alla $x \in A$.

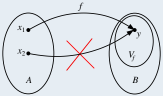
Injektiva, surjektiva och bijektiva funktioner

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

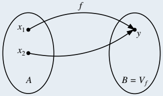
Definition 2

En funktion $f : A \to B$ kallas

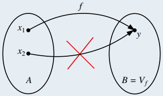
- Injektiv om det för varje $y \in B$ finns högst ett $x \in A$.



- Surjektiv om det för varje $y \in B$ finns minst ett $x \in A$.



- Bijektiv om det för varje $y \in B$ finns exakt ett $x \in A$.



Anm: f bijektiv $\Leftrightarrow$ f injektiv och surjektiv.

Injektiva, surjektiva och bijektiva funktioner

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 4

$f(x) = x^2$. Är f injektiv, surjektiv eller bijektiv om

1. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$?
2. $A = \mathbb{R}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$?
3. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $B = \mathbb{R}$?
4. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}; y \geq 0\}$?

Lösning:

1. Inget av dem.
2. Surjektiv ($B = V_f$).
3. Injektiv ($V_f \subset B$).
4. Injektiv och surjektiv $\Rightarrow$ bijektiv ($B = V_f$).

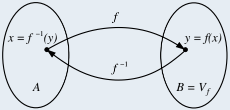
En funktion $f : A \to B$ kallas

- Injektiv om det för varje $y \in B$ finns högst ett $x \in A$.
- Surjektiv om det för varje $y \in B$ finns minst ett $x \in A$.
- Bijektiv om det för varje $y \in B$ finns exakt ett $x \in A$.

Invers funktion

Definition 3

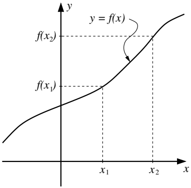
En bijektiv funktion $f : A \to B$ kallas inverterbar. Den funktion som till varje $y \in B$ ordnar ett $x \in A$ sådant att $f(x) = y$ kallas för inversen till f och betecknas f^{-1}:



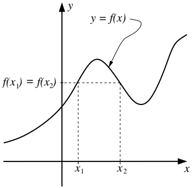
$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Av definitionen följer att om f är inverterbar så gäller följande:

- $D_{f^{-1}} = V_f = B$ och $V_{f^{-1}} = D_f = A$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ för alla $x \in D_f$
- $f(f^{-1}(y)) = y$ för alla $y \in V_f$
- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



(a) f inverterbar



(b) f ej inverterbar

Anm: Om funktionen är injektiv men inte surjektiv (dvs inte bijektiv) så existerar en invers men den är bara definierad på V_f.

Invers funktion

Exempel 5

Är funktionen $f(x) = x^2$ inverterbar?

Lösning:

$x_1 = 1,\ x_2 = -1 \Rightarrow f(x_1) = 1^2 = 1,\ f(x_2) = (-1)^2 = 1$

$\therefore x_1 \neq x_2 \not\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ dvs f är inte inverterbar.

Invers funktion

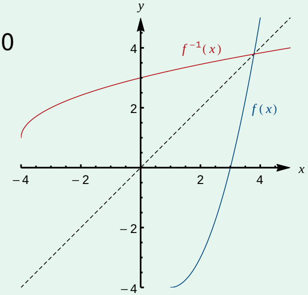
Exempel 6

Undersök om $f(x) = x^2 - 2x - 3,\ x \geq 1$, är inverterbar och bestäm i så fall inversen $f^{-1}(x)$.

Lösning:

Sätt $y = f(x)$ och lös ut x:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - (3 + y) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \pm \sqrt{4 + y} \\ x &\geq 1 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{4 + y} \\ \therefore x_1 &\neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{aligned}$$



dvs f är inverterbar.
Byter vi variabel från y till x får vi

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{4 + x},\ x \geq -4$$

Anm: Kurvan $y = f^{-1}(x)$ är spegelbilden av $y = f(x)$ i linjen $y = x$

Relationer

Exempel 7

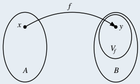
Kan $y \geq x$, $A = B = \mathbb{R}$, representeras av en funktion $f : A \to B$?

Nej, för varje $x \in A$ finns oändligt många $y \in B$ som uppfyller $y \geq x$.

Definition 1

En regel som för varje element x i en mängd A ordnar exakt ett element y i en mängd B kallas en funktion från A till B:

$$f : A \to B$$



Relationer mellan tal, t ex $y \geq x$, kan inte beskrivas inom ramen för funktionsbegreppet.

Relationer

I matematiken är en relation något som gäller (eller inte gäller) mellan två eller flera objekt:

- Sara är mamma till Kalle
- Kalle är släkt med Sara
- Sara och Kalle bor i samma land
- a är större än eller lika med b
- a ligger mellan b och c
- b är delbart med a

Definition 4

Om A och B är mängder så är den Cartesiska produkten

$$A \times B = \{(a, b); a \in A,\ b \in B\}$$

Exempel 8

$A = \{i, j, k\}, B = \{m, n\} \Rightarrow A \times B = \{(i, m), (i, n), (j, m), (j, n), (k, m), (k, n)\}$

Relationer

Definition 5

En (binär) relation $\mathcal{R}$ från A till B är en delmängd av $A \times B$.
Beteckning: $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x \,\mathcal{R}\, y$

Exempel 9

- $A = \{a, c, k, l\}$
- $B = A$
- $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x$ kommer före y i alfabetet

$\Rightarrow \mathcal{R} = \{(a, c), (a, k), (a, l), (c, k), (c, l), (k, l)\}$

Exempel 10

- $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $B = A$
- $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x \mid y$

$\Rightarrow \mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$

Om $A = B$ är $\mathcal{R}$ homogen och man säger att $\mathcal{R}$ är en relation på A.

Relationer

Definition 6

En relation $\mathcal{R}$ på A kallas

- Reflexiv om $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$
- Symmetrisk om $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- Antisymmetrisk om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$
- Transitiv om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
- Total om $x \mathcal{R} y \vee y \mathcal{R} x \quad \forall x, y \in A$

Exempel 11

Är någon av relationerna nedan symmetrisk, antisymmetrisk eller transitiv?

- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ är släkt* med y: Symmetrisk, transitiv
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ är mamma till y: Inget av dem
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leq y$: Antisymmetrisk, transitiv
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \neq y$: Symmetrisk
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \subseteq y$: Antisymmetrisk, transitiv

*En släkt avser här en eller flera familjer med gemensam förfader eller -moder och släktskap mellan två personer innebär att de tillhör samma släkt.

Ekvivalensrelationer

Definition 7

En ekvivalensrelation på A är reflexiv, symmetrisk och transitiv

Exempel 12

- $A =$ Sveriges befolkning
- $B = A$
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ känner y

Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation?

En relation $\mathcal{R}$ på A kallas

- Reflexiv om $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$
- Symmetrisk om $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- Transitiv om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

- x känner x för alla x i $A \Rightarrow \mathcal{R}$ är reflexiv
- x känner $y \Rightarrow y$ känner $x \Rightarrow \mathcal{R}$ är symmetrisk
- x känner $y \wedge y$ känner $z \not\Rightarrow x$ känner $z \Rightarrow \mathcal{R}$ är inte transitiv

$\therefore \mathcal{R}$ är inte en ekvivalensrelation.

Ekvivalensrelationer

Exempel 13

- $A =$ Sveriges befolkning
- $B = A$
- $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x$ är släkt med y

Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation?

En relation $\mathcal{R}$ på A kallas

- Reflexiv om $x \,\mathcal{R}\, x \quad \forall x \in A$
- Symmetrisk om $x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \,\mathcal{R}\, x$
- Transitiv om $x \,\mathcal{R}\, y \wedge y \,\mathcal{R}\, z \Rightarrow x \,\mathcal{R}\, z$

- x är släkt med x för alla x i $A \Rightarrow \mathcal{R}$ är reflexiv
- x är släkt med $y \Rightarrow y$ är släkt med $x \Rightarrow \mathcal{R}$ är symmetrisk
- x är släkt med $y \wedge y$ är släkt med $z \Rightarrow x$ är släkt med $z \Rightarrow \mathcal{R}$ är transitiv

$\therefore \mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Anm: Att vara släkt med = being related

Ekvivalensrelationer

Exempel 14

Är $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow n \mid x - y, A = \mathbb{Z}$, en ekvivalensrelation?

En relation $\mathcal{R}$ på A kallas
- Reflexiv om $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$
- Symmetrisk om $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- Transitiv om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

- $n \mid x - x \quad \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ \mathcal{R}$ är reflexiv
- $n \mid x - y \Rightarrow n \mid y - x \Rightarrow \ \mathcal{R}$ är symmetrisk
- $n \mid x - y \wedge n \mid y - z \Rightarrow n \mid x - y + y - z \Rightarrow n \mid x - z \Rightarrow \ \mathcal{R}$ är transitiv

$\therefore \ \mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Relationen $\mathcal{R}$ ovan är kongruens modulo n:

$$x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid x - y$$

Anm: Ekvivalensrelationer kan jämföras med likhetstecken.

Partiella ordningsrelationer

Definition 8

En partiell ordningsrelation på A är reflexiv, antisymmerisk och transitiv.

Exempel 15

Är $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leq y$, $A = \mathbb{R}$, en partiell ordningsrelation?

En relation $\mathcal{R}$ på A kallas

- Reflexiv om $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$
- Antisymmetrisk om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$
- Transitiv om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

- $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{R}$ är reflexiv
- $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y \Rightarrow \mathcal{R}$ är antisymmetrisk
- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow \mathcal{R}$ är transitiv

$\therefore\ \mathcal{R}$ är en partiell ordningsrelation.

Partiella ordningsrelationer

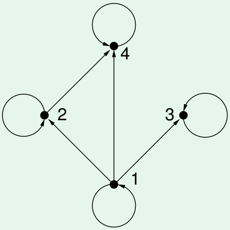
Hassediagram

Exempel 16

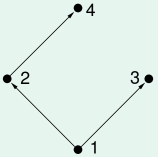
Partiell ordningsrelation:

$$x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x \mid y, \quad A = \{1, 2, 3, 4\}$$

- $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$
- $\mathcal{R}$ reflexiv: $x \mid x$ för alla $x \in A$
- $\mathcal{R}$ antisymmetrisk: $x \mid y \wedge y \mid x \Rightarrow x = y$
- $\mathcal{R}$ transitiv: $x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z$



Relationsgraf



Hassediagram: Redundant information borttagen

Partiella ordningsrelationer

Maximala element och största element

Definition 9

Ett element $a \in A$ kallas

- Maximalt om $x \neq a \Rightarrow a \not\mathcal{R} x$
- Minimalt om $x \neq a \Rightarrow a \, \mathcal{R} \, x$
- Ett största element i A om $x \, \mathcal{R} \, a \quad \forall x \in A$
- Ett minsta element i A om $x \not\mathcal{R} a \quad \forall x \in A$

Anm: Ett största/minsta element är alltid maximalt/minimalt.

Partiella ordningsrelationer

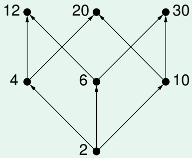
Maximala element och största element

Exempel 17

$\mathcal{R}$ binär relation på $A = \{2, 4, 6, 10, 12, 20, 30\}$. $x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x \mid y$

1. Rita Hassediagram.
2. Bestäm alla maximala och minimala element.
3. Bestäm största och minsta element.

Lösning:



Ett element $a \in A$ kallas

- Maximalt om $x \neq a \Rightarrow a \not\mathcal{R} x$
- Minimalt om $x \neq a \Rightarrow a\mathcal{R}x$
- Ett största element i A om $x\,\mathcal{R}\,a \quad \forall x \in A$
- Ett minsta element i A om $x \not\mathcal{R} a \quad \forall x \in A$

1.
2. 12, 20 och 30 delar inte något av de övriga $\Rightarrow$ De är maximala element.
   2 är det enda tal som delar alla andra $\Rightarrow$ 2 är minimalt element.
3. Det finns inget tal som alla delar $\Rightarrow$ Största element saknas.
   Inget av de övriga talen delar 2 $\Rightarrow$ 2 är minsta element.