MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om grafer

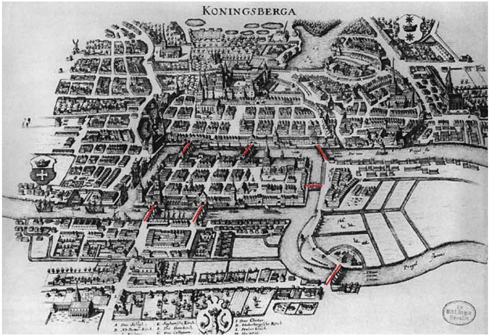
Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

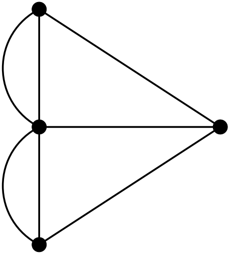
25 september 2024

Broarna i Königsberg

De sju broarna i Königsberg (nuvarande Kaliningrad) på 1700-talet:



(a) Königsberg 1652



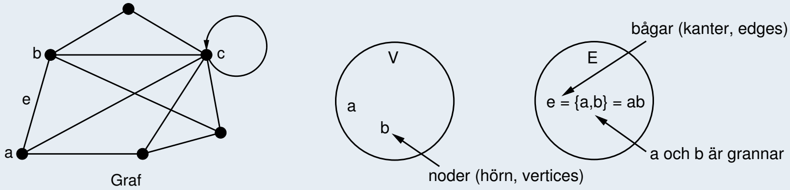
(b) Graf

- *Problem:* Finns det en sluten väg genom staden sådan att samtliga broar passeras endast en gång?
- Leonhard Euler (1707-1783) publicerade en lösning på problemet 1736. Detta betraktas som grafteorins födelse.

Terminologi och definitioner

Definition 1

En graf G är ett ordnat par av mängder $G = (V, E)$.

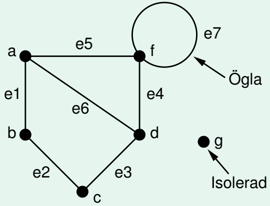


- Bågen $e = \{a, b\} = ab$ är incident med a och b som kallas ändpunkter.
- Bågen cc kallas en ögla.

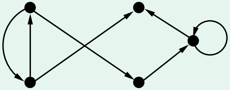
Anm: Om man tillåter att ett nodpar förbinds med flera bågar används termen multigraf.

Terminologi och definitioner

Exempel 1



(a) Graf



(b) Riktad graf

- $e_1, e_2, ..., e_7$ bågar
- a, b, c, d, f, g noder
- e_7 ögla

Anm: I en riktad graf är varje båge försedd med en orientering. Beteckningen graf används här för oriktade grafer.

Terminologi och definitioner

Definition 2

För en graf G gäller följande:

- Om a och b är noder så är:
  - $a = a_0, e_1, a_1, e_2, a_2, ..., a_{n-1}, e_n, a_n = b$, $e_i = a_{i-1}a_i$, en väg från a till b.
  - $n =$ vägens längd (= antal bågar).
- Om $a = b$ är vägen sluten och kallas en cykel.
- Om $a \neq b$ är vägen öppen.
- En väg som passerar varje nod högst en gång kallas enkel.
- Längden av den kortaste vägen mellan a och b kallas avståndet.

Terminologi och definitioner

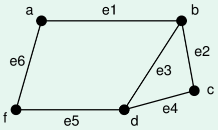
Definition 3

En graf G är:

- Sammanhängande om två godtyckliga noder kan förbindas med en väg.
- Planär om den kan ritas i ett plan utan att några bågar skär varandra.
- Komplett (fullständig) om den är öglefri och det finns en båge mellan varje par av noder. En komplett graf med n noder betecknas K_n.
- Ett träd om den är sammanhängande och saknar cykler.

Terminologi och definitioner

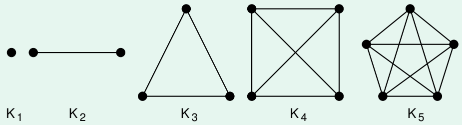
Exempel 2



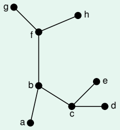
Sammanhängande planär graf

- e_1, e_2 öppen enkel väg från a till c, längd $n = 2$.
- e_1, e_3, e_5, e_6 cykel eller sluten väg
- e_1, e_2, e_4, e_3, e_2 är ej enkel
- G är sammanhängande och planär men ej komplett.

Exempel 3



(a) De kompletta graferna $K_1, \ldots, K_5$



(b) Träd

Terminologi och definitioner

Definition 4

Om v är en nod i grafen G så är graden (valensen) av v

$$\deg(v) = \text{Antal bågar som har ändpunkt i } v$$

Exempel 4

$G = (V, E)$. Bestäm $\sum_{v \in V} \deg(v)$.

- Varje båge $e = ab$ i E ger bidraget 1 till $\deg(a)$ och bidraget 1 till $\deg(b)$ dvs bidraget 2 till $\sum_{v \in V} \deg(v)$.

Sats 1

Om $G = (V, E)$ så är $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

Terminologi och definitioner

Exempel 5

På en fest där folk hälsar på varandra är antalet personer som hälsat ett udda antal gånger jämnt. Varför?

- $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$
- $\Rightarrow$ Antalet noder med udda grad är jämnt. (The handshaking lemma.)

Exempel 6

Bestäm $|V|$ om $G = (V, E)$ är öglefri, har 18 bågar och alla noder har grad 3.

Lösning: Sätt $n =$ antal noder

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \sum_{v \in V} \deg(v) = 3n = 2|E| = 2 \cdot 18 = 36 \\ &\Leftrightarrow \quad n = \frac{36}{3} = 12 \end{aligned}$$

Terminologi och definitioner

Exempel 7 (T160816, uppg 6a, 2p)

Grafen $G = (V, E)$ är sammanhängande och varje nod har grad 5. Dessutom gäller det att $|E| = 4|V| - 18$. Bestäm $|V|$ och $|E|$.

Lösning:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = |V| \cdot 5 = 2|E| = 2(4|V| - 18) \Leftrightarrow 3|V| = 36$$

$\therefore |V| = 12$ och $|E| = 30$.

Exempel 8 (T150109, uppg 3a, 2p)

Grafen G har 9 bågar. 3 av noderna har grad 3 och 2 av noderna har grad 4. Hur många noder har grad 1?

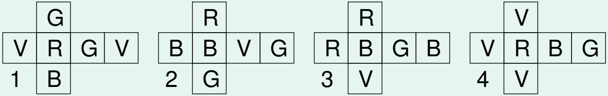
Lösning: Sätt $n =$ antal noder med grad 1:

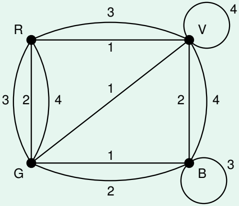
$$\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg(v) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + n \cdot 1 = 2|E| = 2 \cdot 9 \Leftrightarrow n = 1.$$

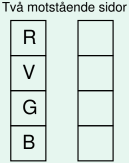
Terminologi och definitioner

Exempel 9 (Instant insanity)

Stapla de fyra kuberna på varandra så att varje sida i stapeln innehåller alla fyra färgerna. Är det möjligt med nedanstående kuber?







- Två motstående sidor i pelaren motsvarar 4 bågar med olika nummer.
- Alla 4 färgerna finns på båda sidorna $\Leftrightarrow$ Varje nod är ändpunkt 2 ggr.

Anm: Det finns 41472 olika konfigurationer och endast två ger en lösning. Att testa sig fram är alltså ingen jättebra idé...

Terminologi och definitioner

Exempel 9 (Instant insanity forts)

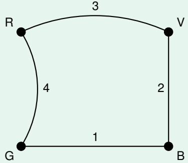
$\therefore$ De 4 bågarna bildar en delgraf som:

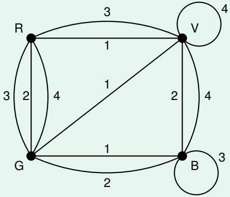
- En cykel genom alla fyra noderna
- En cykel genom 3 av noderna, en ögla i den 4:e
- En cykel genom 2 av noderna, öglor i de 2 andra
- En cykel genom 2 av noderna, en cykel genom de 2 andra
- En ögla i varje nod

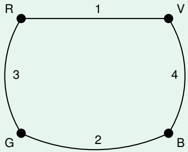
Finns en sådan för just dessa kuber?

Terminologi och definitioner

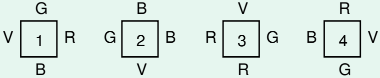
Exempel 9 (Instant insanity forts)







- Kan vi hitta ytterligare en likadan delgraf som motsvarar de andra paret sidor i pelaren är problemet löst.
- Lösning:



Grannmatris

Hur kan man representera en graf i en dator?

Definition 5

Om G är en öglefri graf med n noder och e bågar så är Grannmatrisen till G $n \times n$ matrisen $X = (x_{ij})$ där

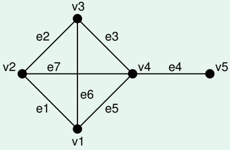
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ om det finns en båge mellan nod } i \text{ och nod } j \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

Grannmatris

Exempel 10

Bestäm Grannmatrisen X till grafen

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Allmänt

Grannmatrisen X:

- Är symmetrisk.
- $x_{ii} = 1 \Leftrightarrow$ ögla vid nod i
- Öglefri graf $\Rightarrow$ Antal 1:or i en rad eller kolonn = graden av motsv nod.

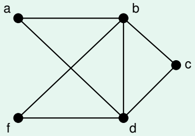
Eulergrafer

Definition 6

- En väg som passerar varje båge i en graf precis en gång kallas en Eulerväg.
- En cykel som passerar varje båge i en graf precis en gång kallas en Eulercykel.
- En graf som innehåller en Eulercykel kallas en Eulergraf.

Exempel 11

Är G en Eulergraf?



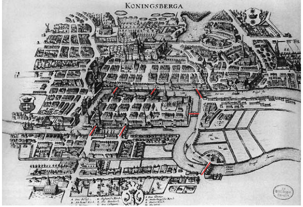
abcdfbda är en Eulercykel
$\Rightarrow$ G är en Eulergraf

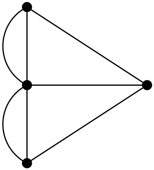
Eulergrafer

Sats 2 (Euler-Hierholzer's sats)

En sammanhängande graf G innehåller en Eulercykel omm varje nod har jämnt gradtal.

De sju broarna i Königsberg: Finns Eulercykel?





← Fyra noder av udda grad

Enligt Euler-Hierholzer's sats finns ingen Eulercykel.

Eulergrafer

Exempel 12 (T171024, uppg 4a, 2p)

Grafen G är sammanhängande och har 9 bågar. Tre av noderna har grad 2 och två har grad 4. De resterande noderna är färre än fyra och har samma grad.

- a) Är G en Eulergraf?
- b) Är det möjligt att rita en graf med 9 noder där alla noder har grad 3?

Lösning:

- a) Handskakningslemmat:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 3\cdot 2 + 2\cdot 4 + n\cdot g = 2\cdot 9 \Leftrightarrow ng = 4$$

$$ng = 4 \text{ och } n < 4 \Rightarrow (n,g) = (1,4) \text{ eller } (n,g) = (2,2)$$

  Euler-Hierholzers sats: G är en Eulergraf eftersom den är sammanhängande och alla noder har jämnt gradtal.

- b) $\sum_{v\in V} \deg(v) = 9\cdot 3 = 27 \neq 2|E|$

  $\therefore$ Nej, det går inte.

Anm: I en graf är alltid antalet noder med udda grad jämnt.

Eulergrafer

Exempel 13 (T191028, uppg 5b, 2p)

Grafen G är sammanhängande och har 11 bågar. Tre av noderna har grad 4 och tre av noderna har grad 2. Kan man med denna information dra slutsatsen att G är en Eulergraf?

Lösning:

a) Sätt $s =$ summan av de resterande nodernas gradtal.
Handskakningslemmat:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + s = 2 \cdot 11 \Leftrightarrow s = 4$$

Vi utnyttjar Euler-Hierholzers sats igen:
Eftersom $s = 4$ är det möjligt att det resterande antalet noder är 4 och deras gradtal 1 som är udda.

$\therefore$ Nej, det går inte.

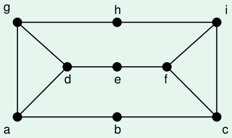
Hamiltongrafer

Definition 7

- En väg som passerar varje nod i en graf precis en gång kallas en Hamiltonväg.
- En cykel som passerar varje nod i en graf precis en gång kallas en Hamiltoncykel.
- En graf som innehåller en Hamiltoncykel kallas en Hamiltongraf.

Exempel 14

Ge exempel på en Hamiltonväg i G.

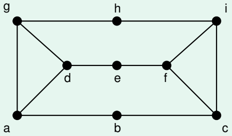


abcfedghi är en Hamiltonväg.

Hamiltongrafer

Exempel 14 (Forts)

Är G en Hamiltongraf?



- Finns Hamiltoncykel?
- Cykeln måste gå genom varje nod
  $\Rightarrow$ Det spelar ingen roll var vi börjar.

$$b \to c \to \begin{cases} i \to \begin{cases} h \to g \to \ldots \text{ omöjlig situation när vi når } f \\ f \to e \to \ldots \text{ omöjlig situation när vi når } h \end{cases} \\ f \to \begin{cases} i \to h \to \ldots \text{ omöjlig situation när vi når } e \\ e \to d \to \ldots \text{ omöjlig situation när vi når } i \end{cases} \end{cases}$$

$\therefore$ Ej hamiltiongraf

Hamiltongrafer

Det finns inget generellt sätt (än) att avgöra om en graf är en Hamiltongraf. Däremot finns det vissa kriterier som kan användas:

Sats 3 (Ore's sats)

G öglefri graf med $n \geq 3$ noder. Om det för varje par av noder x, y (som inte är grannar) gäller att

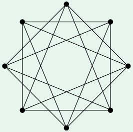
$$\deg(x) + \deg(y) \geq n$$

så har G en Hamiltoncykel.

Anm: Omvändningen gäller inte! Om G är en Hamiltongraf är det inte säkert att $deg(x) + deg(y) \geq n$ för varje par av noder som inte är grannar.

Exempel 15

Är grafen G en Hamiltongraf?



$n = 8$, $\deg(x) = 4$
$\Rightarrow$ G har Hamiltoncykel
$\Rightarrow$ G är en Hamiltongraf

Hamiltongrafer

The Travelling Salesperson Problem (TSP)

Givet en lista med städer:

Vilken är den kortast möjliga vägen som startar i en stad, passerar varje annan stad exakt en gång och sedan återvänder till den ursprungliga staden?

- Problemets ursprung är oklart men förekommer i en handbok för handelsresande från 1832.
- TSP formulerades och studerades matematiskt först på 1930-talet av Merrill M. Flood i ett försök att hitta ett ruttsystem för skolbussar.
- TSP är ett av de mest studerade problemen inom optimering.
- Algoritmen som snabbast löser problemet exakt har tidskomplexitet $\mathcal{O}(n^2 2^n)$.
- Rekordet (2006) för antalet noder för vilka problemet är löst är 85 900[1]. Tidsåtgång: 136 CPU-år.
- Problemet är löst för Sveriges 24978 orter. Den som ska passera samtliga orter måste åka 72500 km.

[1] Applegate, D. L., Bixby, R. M., Chvátal, V., Cook, W. J. (2006), *The Traveling Salesman Problem*

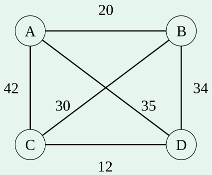
Hamiltongrafer

The Travelling Salesperson Problem (TSP)

Ett TSP-problem kan modelleras med en oriktad viktad graf G:

Bestäm en Hamiltoncykel med minst vikt.

Exempel 16



Hamiltoncykeln $ABCDA$ i grafen G har vikten $20 + 30 + 12 + 35 = 97$
Finns det någon Hamiltoncykel i G som har mindre vikt?

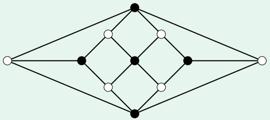
Kromatiska tal och kromatiska polynom

Definition 8

- Färgning av en graf G betyder att noderna färgas så att angränsande noder har olika färg.
- $\chi(G) =$ Det minsta antalet färger som krävs för att färga G kallas det kromatiska talet för G.
- $P_G(\lambda) =$ Antalet sätt att färga G med högst λ färger kallas det kromatiska polynomet för G.

Anm: $\chi(G) =$ det minsta λ för vilket $P_G(\lambda) \neq 0$.

Exempel 17

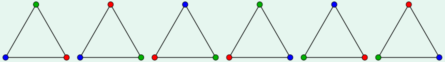


Det kromatiska talet för grafen är $\chi(G) = 2$.

Kromatiska tal och kromatiska polynom

Exempel 18

Den triangulära (och kompletta) grafen K_3:



$$
\begin{aligned}
P_{K_3}(0) &= P_{K_3}(1) = P_{K_3}(2) = 0 \\
P_{K_3}(3) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\
P_{K_3}(4) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \\
&\vdots \\
P_{K_3}(\lambda) &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda \\
\therefore \chi(G) &= 3
\end{aligned}
$$

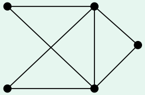
Allmänt

Det kromatiska polynomet för den kompletta grafen K_n är

$$P_{K_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - (n - 1))$$

Kromatiska tal och kromatiska polynom

Exempel 19 (T141030, uppg 6a, 2p)



Bestäm det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ och det kromatiska talet $\chi(G)$ till grafen G. Innehåller G någon Eulercykel?

Lösning: $P_G(\lambda) =$ antalet sätt att färga G med λ färger.

- För att optimera detta antal börjar vi färga en av de två noderna i mitten: Har vi λ färger kan den färgas på λ olika sätt.
- Den andra mitt-noden kan då färgas på $\lambda - 1$ olika sätt.
- De resterande tre noderna kan nu färgas på vardera $\lambda - 2$ olika sätt.

$$\text{Multiplikationsprincipen} \Rightarrow P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$$

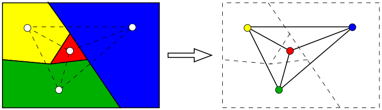
- $P_G(0) = P_G(1) = P_G(2) = 0$ och $P_G(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \neq 0 \Rightarrow \chi(G) = 3.$
- Grafen G är sammanhängande och alla noder har jämn grad: Euler-Hierholzers sats $\Rightarrow$ G har en Eulercykel. (Vi svarade på detta i Ex 11!)

Fyrfärgsproblemet

Är det möjligt att med endast 4 färger måla en plan karta så att alla länder med gemensam gräns får olika färg?

Problemet kan överföras på planära grafer:

Kan varje planär graf färgas med 4 färger?



Sats 4 (The four color theorem, Kenneth Appel & Wolfgang Haken 1976)

Om G är en planär graf är $\chi(G) \leq 4$.

Anm: Satsen formulerades av Francis Guthrie redan 1852. Appel & Haken reducerade problemet till 1936 olika fall som sedan kontrollerades mha dator.