MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om grundläggande algebra

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

2 september 2024

Faktorisering

Konjugat- och kvadreringsreglerna:

- $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$
- $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm ab \pm ba + b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Exempel 1

Faktorisera uttrycket

a) $x^3 + x^2y - 4xy^2 - 4y^3$

b) $x^4 + 4x^3y - 16xy^3 - 16y^4$

a) $x^3 + x^2y - 4xy^2 - 4y^3 = x^2(x+y) - 4y^2(x+y) = (x+y)(x^2-4y^2)$

$= (x+y)(x+2y)(x-2y)$

b) $x^4 + 4x^3y - 16xy^3 - 16y^4 = (x^2+4y^2)(x^2-4y^2) + 4xy(x^2-4y^2)$

$= (x^2-4y^2)(x^2+4y^2+4xy)$

$= (x+2y)(x-2y)(x+2y)^2 = (x-2y)(x+2y)^3$

Andragradsekvationer och kvadratkomplettering

Kvadreringsreglerna: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2 - b^2$

Exempel 2

Lös ekvationen

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $x^2 + px + q = 0$

a) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2.$

b) $x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 4 + 3$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x + 2 = \pm 1$

$\Leftrightarrow x = -2 \pm 1 \Leftrightarrow x_1 = -3,\ x_2 = -1$

c) $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

pq-formeln!

Fler ekvationer

Exempel 3

Lös ekvationen

a) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

b) $x = 2\sqrt{x} + 3$

c) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

a) $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x_1 = 0$ eller $x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm 2$

$\Leftrightarrow$ $x_2 = 3$, $x_3 = -1$

b) Sätt $t = \sqrt{x}$:

$x - 2\sqrt{x} - 3 = t^2 - 2t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $t_1 = \sqrt{x_1} = 3 \Leftrightarrow x_1 = 9$

$t_2 = \sqrt{x_2} = -1$ saknar reella lösningar!

c) Sätt $t = x^2$:

$x^4 - 2x^2 - 3 = t^2 - 2t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $t_1 = 3$, $t_2 = -1$

- $t_1 = x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$
- $t_2 = x_2^2 = -1$ Saknar reella lösningar!

Rotekvationer

Exempel 4

Lös ekvationen

a) $\sqrt{2x+3} = x$

b) $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x+1}$

a) $\sqrt{2x+3} = x$

$\Rightarrow 2x+3 = x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1^2+3} = 1 \pm 2$

$\Leftrightarrow x_1 = 3, \underbrace{x_2 = -1}$ Falsk rot!

Svar: $\sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow x = 3$

b) $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x+1}$

$\Rightarrow 2x+3 = x+1$

$\Leftrightarrow x = -2 \leftarrow$ Falsk rot!

$\therefore$ Ekvationen saknar reella lösningar!

Olikheter

Exempel 5

Lös olikheten $\dfrac{2x-1}{x+3} < 1$.

$$\frac{2x-1}{x+3} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 < 1\cdot(x+3) \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow x < 4$$

Kontroll: $x = -4 < 4$

$$\frac{2(-4)-1}{-4+3} = \frac{-9}{-1} = 9 < 1 \;?!?$$

OBS! $3 > 2 \Rightarrow 2\cdot 3 > 2\cdot 2$

$3 > 2 \not\Rightarrow (-2)\cdot 3 > (-2)\cdot 2$

Gör så här istället:

$$\frac{2x-1}{x+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} - \frac{x+3}{x+3} = \frac{2x-1-(x+3)}{x+3} = \frac{x-4}{x+3} < 0$$

Teckenstudium:

	-3		4	
$x-4$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-4}{x+3}$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Ej def.

$\therefore -3 < x < 4$

Olikheter

Exempel 7

Lös olikheten $\dfrac{x-1}{x+2} \leq \dfrac{x+3}{x-4}$.

$$\frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+3}{x-4} \iff \frac{x+3}{x-4} - \frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

$$\iff \frac{(x+3)(x+2)-(x-1)(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+2x+3x+6-(x^2-4x-x+4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$= \frac{10x+2}{(x-4)(x+2)} = \frac{2(5x+1)}{(x-4)(x+2)} \geq 0$$

Teckenschema:

	-2		$-\frac{1}{5}$		4	
$5x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
tot	$-$	$*$	0	$-$	$*$	$+$

$\therefore \quad -2 < x \leq -\frac{1}{5}$ eller $x > 4$

Ekvationer och olikheter i Mathematica

- Exempel 4a:

```
Solve[Sqrt[2x+3]==x,x]
```

- Exempel 6:

```
Reduce[(x-1)/(x+2)<=(x+3)/(x-4),x]
```