MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om induktion och rekursion

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

9 september 2024

Induktion

Exempel 1

Vilket tal är störst: 2^n eller n^2 då n är ett positivt heltal?

Kontroll:

n	2^n	n^2
1	2	1
2	4	4
3	8	9
4	16	16
5	32	25
6	64	36
7	128	49

Påstående: $2^n > n^2$ för alla heltal $n \geq 5$.

Hur *bevisar* vi detta påstående?

Induktion

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 1 (forts)

Påstående: $2^n > n^2$ för alla heltal $n \geq 5$.

- Påståendet är sant för $n = 5$
- *Om* påståendet är sant måste det vara sant för två på varandra följande heltal $n = p$ och $n = p + 1$, $p \geq 5$
- Kontroll: Om påståendet är sant för $n = p$ dvs om

$$2^p > p^2 \Leftrightarrow 2^p - p^2 > 0 \ \leftarrow \text{Induktionsantagandet (i.a.)}$$

då får vi för $n = p + 1$:

$$\begin{aligned} 2^{p+1} - (p+1)^2 &= 2 \cdot 2^p - p^2 - 2p - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i.a.}}}{>} 2 \cdot p^2 - p^2 - 2p - 1 \\ &= p^2 - 2p - 1 = p(p-2) - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ p \geq 5}}{\geq} 5(5-2) - 1 = 14 > 0 \end{aligned}$$

Induktionsaxiomet

Exempel 1 (forts)

Sammanfattning:

- Om påståendet är sant för $n = p$ är det också sant för $n = p + 1$
- Påståendet är sant för $n = 5 \Rightarrow$ sant för $n = 5 + 1 = 6$
- Sant för $n = 6 \Rightarrow$ sant för $n = 7$, sant för $n = 7 \Rightarrow$ sant för $n = 8$, osv...

$\therefore$ Påståendet är sant för alla heltal $n \geq 5$.

Induktionsaxiomet

$S(n)$ öppen utsaga, $n \in \mathbb{Z}^+$. Om

1. $S(n_0)$ sann och
2. $S(p)$ sann $\Rightarrow S(p+1)$ sann

så är $S(n)$ sann för alla heltal $n \geq n_0$.

Induktionsaxiomet

Exempel 2

Studera den rekursivt definierade talföljden

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}\,, \\ a_0 = 1. \end{cases} \qquad n \geq 0$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2\sqrt{a_0} = 2\sqrt{1} = 2 \\
a_2 &= 2\sqrt{a_1} = 2\sqrt{2} = 2.828\ldots \\
a_3 &= 2\sqrt{a_2} = 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 3.363\ldots \\
a_4 &= 2\sqrt{a_3} = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 3.668\ldots \\
&\vdots \\
a_{20} &= 3.999994\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Påstående: $a_n \leq 4 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Induktionsaxiomet

Exempel 2 (forts)

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}\,, \\ a_0 = 1. \end{cases} \quad n \geq 0 \qquad \text{Påstående: } a_n \leq 4 \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

1. För $n = 0$ har vi:
   $a_1 = 2\sqrt{a_0} = 2 \cdot 1 = 2 < 4$ dvs påståendet är sant för $n = 0$!
2. Antag att påståendet är sant för $n = p$ dvs

$$a_{p+1} = 2\sqrt{a_p} \leq 4 \qquad \leftarrow \text{Induktionsantagandet (i.a)}$$

För $n = p + 1$ får vi då

$$a_{p+2} = 2\sqrt{a_{p+1}} \underset{\text{i.a.}}{\leq} 2\sqrt{4} = 4$$

Slutsats:
Påståendet är sant för $n = 0$ och om det är sant för $n = p$ är det också sant för $n = p + 1$. Enligt induktionsaxiomet är därför påståendet sant för alla heltal $n \geq 0$.

Induktionsaxiomet

Exempel 3

Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

Vi gör återigen ett induktionsbevis:

1. För $n = 1$ har vi:

$$\mathrm{VL}_{n=1} = 1 \cdot 2 = 2, \qquad \mathrm{HL}_{n=1} = 2 + (1-1)2^{1+1} = 2$$

$\therefore$ Påståendet är sant för $n = 1$.

Induktionsaxiomet

Exempel 3 (forts)

2. Antag att påståendet är sant för $n = p$ (Induktionsantagandet) dvs

$$\underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + p \cdot 2^p}_{\mathrm{VL}_{n=p}} = \underbrace{2 + (p-1)2^{p+1}}_{\mathrm{HL}_{n=p}} \leftarrow \text{(i.a.)}$$

Vi ska nu visa att påståendet även är sant för nästa heltal $n = p + 1$:

$$\underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + p \cdot 2^p + (p+1) \cdot 2^{p+1}}_{\mathrm{VL}_{n=p+1}} = \underbrace{2 + ((p+1) - 1)2^{(p+1)+1}}_{\mathrm{HL}_{n=p+1}}$$

För $n = p + 1$ får vi

$$\begin{aligned} \mathrm{VL}_{n=p+1} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + p \cdot 2^p + (p+1) \cdot 2^{p+1} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i.a.}}}{=} 2 + (p-1)2^{p+1} + (p+1)2^{p+1} = 2 + (p - 1 + p + 1)2^{p+1} \\ &= 2 + 2p \cdot 2^{p+1} = 2 + ((p+1) - 1)2^{(p+1)+1} = \mathrm{HL}_{n=p+1} \end{aligned}$$

Slutsats:
Påståendet är sant för $n = 1$ och om det är sant för $n = p$ är det också sant för $n = p + 1$. Enligt induktionsaxiomet är därför påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

Induktionsaxiomet

Exempel 4 (Uppgift från tenta)

Visa att

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2 = 1 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + \ldots + (3n-2)^2 = \frac{n(6n^2-3n-1)}{2}$$

för alla heltal $n \geq 1$. *(3p)*

Induktionsbevis:

1. För $n = 1$ har vi:

$$\mathrm{VL}_{n=1} = 1, \qquad \mathrm{HL}_{n=1} = \frac{1(6 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1)}{2} = 1 = \mathrm{VL}_{n=1}$$

$\therefore$ Påståendet är sant för $n = 1$.

Induktionsaxiomet

Exempel 4 (forts)

2. Antag att påståendet är sant för $n = p$ (Induktionsantagandet) dvs

$$\underbrace{1 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + \ldots + (3p-2)^2}_{\text{VL}_{n=p}} = \underbrace{\frac{p(6p^2-3p-1)}{2}}_{\text{HL}_{n=p}} \leftarrow \text{(i.a.)}$$

För $n = p + 1$ får vi då

$$\begin{aligned}
\text{VL}_{n=p+1} &= 1 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3p-2)^2 + (3(p+1)-2)^2 \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i.a.}}}{=} \frac{p(6p^2-3p-1)}{2} + (3(p+1)-2)^2 = \ldots = \frac{6p^3+15p^2+11p+2}{2} \\
\text{HL}_{n=p+1} &= \frac{(p+1)(6(p+1)^2-3(p+1)-1)}{2} = \ldots = \frac{6p^3+15p^2+11p+2}{2} \\
&= \text{VL}_{n=p+1}
\end{aligned}$$

Slutsats:
Påståendet är sant för $n = 1$ och om det är sant för $n = p$ är det också sant för $n = p + 1$. Enligt induktionsaxiomet är därför påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

Binär sökning

Problem

- $A_n =$ Lista med tal ordnade i storleksordning
- $|A_n| = 2^n$

Ex: En lista (A_3) med följande tal: $\underbrace{\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{13}\ \boxed{21}\ \boxed{31}\ \boxed{44}}_{|A_3| = 2^3 = 8}$

- r ett fixt tal

Vilket är det maximala antalet tester som krävs för att avgöra om r finns i A_n?

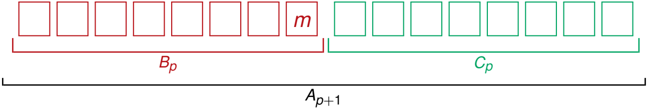
n	$\lvert A_n\rvert = 2^n$	# tester
0	1	1
1	2	2
2	4	3
3	8	4
4	16	5

Påstående: För att avgöra om r finns i A_n krävs max $n + 1$ tester.

Binär sökning

Induktionsbevis:

1. Påståendet är sant för $n = 0$
2. Antag att påståendet är sant för $n = p$ dvs $p + 1$ tester krävs (i.a.)
   - För $n = p + 1$ är $|A_{p+1}| = 2^{p+1} = 2 \cdot 2^p = 2|A_p|$
   - $\Rightarrow A_{p+1} = B_p \bigcup C_p$ där $|B_p| = |C_p| = 2^p$



   - Jämför r med $m \Rightarrow r > m, r = m$ eller $r < m$
   - Worst case: $r > m \Rightarrow r \in C_p$
   - Att hitta r i C_p kräver max $p + 1$ tester enligt i.a.
   - $\Rightarrow$ Totalt $p + 1 + 1$ tester

Slutsats:
Påståendet är sant för $n = 0$ och om det är sant för $n = p$ är det också sant för $n = p + 1$. Enligt induktionsaxiomet är därför påståendet sant för alla heltal $n \geq 0$.