

MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om kombinatorik

Mikael Hindgren



HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

23 september 2024

Vad är kombinatorik?

Huvudfråga:

På hur många sätt kan en viss operation utföras?

Några exempel:

- Hur många gånger genomlöps en slinga i ett visst datorprogram?
- Hur många kodord är möjliga vid konstruktion av en viss kod?
- På hur många sätt kan man få exakt 10 rätt på en stryktipsrad?
- På hur många sätt kan man dela in ett antal individer i lika stora grupper av en viss storlek?
- r identiska objekt ska läggas i n lådor. På hur många sätt kan det ske?

Grundläggande principer

Dirichlets lådprincip

Sats 1 (Dirichlets lådprincip)

Om $n + 1$ föremål fördelats på n lådor måste någon låda innehålla minst 2 föremål.

Exempel 1

I en grupp av fler än 31 personer finns det alltid minst två personer som är födda på samma dag i månaden.

Exempel 2

Om man väljer 8 tal bland $1, 2, \dots, 13$ finns det alltid minst 1 talpar med summa 14. Gruppera talen i 7 lådor: $[1, 13]$, $[2, 12]$, $[3, 11]$, $[4, 10]$, $[5, 9]$, $[6, 8]$, $[7]$

- "Stoppa ner" de 8 talen i de lådor där de hör hemma
Lådprincipen: Någon låda innehåller 2 tal.
- Det kan inte vara i lådan $[7]$ eftersom den bara kan innehålla 1 tal
 \Rightarrow Det måste finnas 2 tal i minst 1 av de andra lådorna.
 Eftersom de 2 talen ligger i samma låda har de summan 14.

Grundläggande principer

Dirichlets lådprincip

Exempel 3

Hur många stryktipsrader måste man tippa för att få minst 5 rätt?

Svaret är 3:

- En rad med bara 1:or
- En med bara kryss
- En med bara 2:or

Motivering:

- Antag att vi har tre lådor: [1], [x], [2].
- Placera resultatet från varje spelad match (13 st) i rätt låda.
- Den fördelning som ger minst antal rätta resultat i varje låda är 4,4,5
 ⇒ Minst en av de tre lådorna innehåller 5 resultat och motsvarande tipsrad har då 5 rätt.

Grundläggande principer

Additions- och multiplikationsprinciperna

Antag att vi har möjlighet att välja mellan m varianter av ett objekt A och n varianter av ett objekt B :

- **Additionsprincipen:** Antalet sätt att göra ett val mellan m varianter av A och n varianter av B är $m + n$.
- **Multiplikationsprincipen:** Antalet sätt att först välja en av m varianter av A och därefter en av n varianter av B är $m \cdot n$.

Exempel 4

I en butik väljer vi bland 4 olika tröjor och 5 olika byxor:

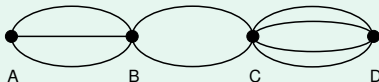
- Additionsprincipen ger totala antalet valmöjligheter om vi ska köpa ett plagg:
 $4 + 5 = 9$.
- Om vi ska köpa en tröja och ett par byxor ger multiplikationsprincipen
 $4 \cdot 5 = 20$ olika alternativ.

Grundläggande principer

Additions- och multiplikationsprinciperna

Exempel 5

En person ska resa från stad A till stad D och att passera städerna B och C.



Multiplikationsprincipen:

möjliga vägar mellan stad A och stad D = $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

Anm: Vi använder "#" för antal

Grundläggande principer

Additions- och multiplikationsprinciperna

Exempel 6

En kastserie består av att 4 kast görs med en tärning.

- 1 Hur många kastserier är möjliga?
- 2 Hur många innehåller minst en 6:a?
- 3 Bör vi "slå vad om" att minst en 6:a kommer upp?

Lösning:

- 1 Multiplikationsprincipen $\Rightarrow 6^4 = 1296$ möjliga kastserier.
- 2 # serier med minst 1 6:a
 $=$ # möjliga serier $-$ # serier utan 6:a
 $= 1296 - 5^4 = 1296 - 625 = 671$
- 3 $P(\text{minst en 6:a}) = \frac{\text{\# serier med minst en 6:a}}{\text{Totala antalet möjliga serier}} = \frac{671}{1296} \approx 0.52 > 0.5$

Sannolikheten för att en händelse A inträffar:

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{Antalet gynnsamma utfall}}{\text{Totala antalet möjliga utfall}} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

Grundläggande principer

Additions- och multiplikationsprinciperna

Exempel 7

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

$$A = \{1, 3, 4\}, \quad B = \{3, 8\}, \quad \emptyset$$

är 3 delmängder av M . Hur många delmängder av M finns det?

Lösning:

Antag att vi ska bilda delmängden M_1 :

- Vi går igenom varje element och bestämmer om det ska ingå i M_1
- För varje element $a \in M$ har vi 2 alternativ: $a \in M_1$ eller $a \notin M_1$
- Multiplikationsprincipen \Rightarrow Totala antalet möjligheter $= 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^8$

Allmänt:

Totala antalet delmängder till en mängd med n element är 2^n .

Grundläggande principer

Additions- och multiplikationsprinciperna

Exempel 8

I den tidig version av BASIC utgjordes en identifierare av en bokstav (A-Z) eller en bokstav följt av en siffra (0-9). Hur många identifierare fanns det?

Lösning:

Additions- och multiplikationsprinciperna \Rightarrow Totala antalet identifierare

= # identifierare med en bokstav + # identifierare med 1 bokstav och 1 siffra

= $26 + 26 \cdot 10 = 286$ st

Vi ska studera fyra huvudfall:

Vi ska välja r element ur en mängd med n element.

Processen kan göras:

- med eller utan återläggning
- med eller utan hänsyn till i vilken ordning vi väljer elementen



Urval med hänsyn till ordning - Permutationer

Utan upprepning

En **permutation** är en uppställning av ett antal objekt i en viss ordning.

Exempel 9

- En permutation av två element ur $M = \{A, B, C\}$ är t.ex. AB.
- Alla möjliga permutationer av 2 element bland 3 olika i M är

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB$$

- # permutationer av två element bland 3 olika i M är enligt multiplikationsprincipen:
sätt att välja 1:a bokstaven \cdot # sätt att välja 2:a bokstaven $= 3 \cdot 2 = 6$
- Totala antalet permutationer av 3 element är: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

Definition 1 (n -fakultet)

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ för } n \geq 1, \quad 0! = 1$$

Urval med hänsyn till ordning - Permutationer

Med upprepning

Exempel 10

Hur många "ord" kan bildas mha bokstäverna i ordet "DATORN" om

- 1 Alla bokstäverna skall användas exakt en gång?
- 2 Tre av bokstäverna skall användas exakt en gång?
- 3 Upprepning är tillåtet och alla ord ska innehålla 10 bokstäver?

Lösning:

Multiplikationsprincipen \Rightarrow

- 1 1:a bokstaven kan väljas på 6 sätt, 2:a på 5 sätt, 3:dje på 4 sätt osv
 $\Rightarrow 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ ord

- 2 $6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{3!} = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$ ord

- 3 Eftersom upprepning är tillåten kan varje bokstav i ordet väljas bland de 6 bokstäverna $\Rightarrow 6 \cdot 6 \cdots 6 = 6^{10} = 60466176$ ord

Urval med hänsyn till ordning

Allmänt:

Antalet sätt att välja ut r objekt bland n olika objekt med hänsyn till ordningen är

- $n \cdot n \cdot n \cdots n = n^r$ upprepning tillåten
- $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ upprepning ej tillåten

$P(n, r) =$ Antalet **permutationer** av r element bland n .

Urval med hänsyn till ordning

Exempel 11

Hur många "ord" med 9 bokstäver kan man bilda mha bokstäverna i ordet "ANFALLARE"?

Lösning:

- Om alla bokstäver hade varit olika hade antalet varit $9!$ st
- 3 st A:

$$A_1 NEFL_1 L_2 A_2 A_3 R = A_2 NEFL_1 L_2 A_1 A_3 R = \dots$$

\Rightarrow $3!$ olika varianter av samma ord

- 2 st L:

$$EN A_1 F L_1 A_2 L_2 A_3 R = EN A_1 F L_2 A_2 L_1 A_3 R$$

\Rightarrow $2!$ olika varianter av samma ord

- Totalt: $\frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240$ olika ord

Urval med hänsyn till ordning

Exempel 11 (forts.)

Hur många “ord” med 9 bokstäver kan man bilda mha bokstäverna i ordet “ANFALLARE” om

- Ⓐ alla A:n ska stå intill varandra?
- Ⓑ det dessutom ska finnas minst en bokstav mellan två L?

Lösning:

- Ⓐ Betrakta A:na som en bokstav $\mathcal{A} = AAA \Rightarrow$ totalt 7 bokstäver: $\mathcal{ANFLLRE}$
Eftersom vi har 2 st L får vi totalt

$$\frac{7!}{2!} = 2520 \quad \text{olika ord}$$

- Ⓑ Om L:n skulle stått intill varandra hade vi fått 6 bokstäver: \mathcal{ANFLRE} ($\mathcal{L} = LL$)
 $\Rightarrow 6! = 720$ olika ord

Om samtliga A:n står intill varandra och det finns minst en bokstav mellan två L får vi därför

$$\frac{7!}{2!} - 6! = 1800 \quad \text{olika ord}$$

Urval utan hänsyn till ordning - Kombinationer

Utan upprepning

En **kombination** av r objekt bland n olika objekt är ett urval där ingen hänsyn tas till ordningsföljden och där urvalet sker utan upprepning.

Exempel 12

Hur många kombinationer av två tal kan vi välja ur $M = \{A, B, C\}$?

- Permutationer:

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB \quad (6 \text{ st})$$

- Kombinationer:

$$AB = BA, \quad AC = CA, \quad BC = CB \quad (3 \text{ st})$$

- # kombinationer

$$= \frac{\# \text{ permutationer av 2 ur 3}}{\# \text{ permutationer av 2 element}} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{(3-2)!2!}$$

Urval utan hänsyn till ordning - Kombinationer

Utan upprepning

Allmänt:

Antalet sätt att välja ut r objekt bland n olika objekt utan hänsyn till ordningen och utan upprepning = antalet kombinationer av r element bland n

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r} \leftarrow \text{Binomialkoefficient ("}n \text{ över } r\text{")}$$

Exempel 13

$$\begin{aligned} \binom{13}{4} &= \frac{13!}{(13-4)!4!} = \frac{13!}{9!4!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 11 \cdot 5 = 715 \end{aligned}$$

I Mathematica: `Binomial[13, 4]`

Urval utan hänsyn till ordning - Kombinationer

Utan upprepning

Exempel 14

På en studentfest hälsar alla de 14 deltagarna på varandra en gång. Hur många hälsningar blir det totalt?

Lösning:

Numreras studenterna (1, 2, 3, ..., 14) motsvarar en hälsning ett talpar. Ordningen oväsentlig \Rightarrow Vi söker # kombinationer av 2 element bland 14:

$$\binom{14}{2} = \frac{14!}{(14-2)!2!} = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91$$

Allmänt: Om n personer hälsar på varandra blir totala antalet hälsningar

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 1 \leftarrow \text{Aritmetisk summa}$$

Rekursiv beskrivning: $y_{n+1} = y_n + n$, $y_1 = 0$.

Jfr med uppgifterna 1a och 3d på paket 2.

Urval utan hänsyn till ordning - Kombinationer

Utan upprepning

Exempel 15

En student ska besvara 7 av 10 tentafrågor. På hur många sätt kan studenten välja de 7 frågorna?

Lösning:

Ordningen oväsentlig \Rightarrow Vi söker # kombinationer av 7 element bland 10:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{(10-7)!7!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Anm: Från exemplet inser vi att

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Urval utan hänsyn till ordning - Kombinationer

Utan upprepning

Exempel 15 (forts)

Tentafrågorna är indelade i 2 delar med 5 frågor i varje. På hur många sätt kan studenten välja ut frågorna om

- ① Exakt 3 från den 1:a delen ska besvaras?
- ② Minst 3 från den 1:a delen ska besvaras?

Lösning:

Additions- och multiplikationsprinciperna \Rightarrow

$$\textcircled{1} \quad \underbrace{\binom{5}{3}}_{3 \text{ från del 1}} \cdot \underbrace{\binom{5}{4}}_{4 \text{ från del 2}} = 10 \cdot 5 = 50 \text{ olika sätt}$$

- ② 3, 4 eller 5 frågor från del 1 och resten från del 2:

$$\binom{5}{3} \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \binom{5}{2} = 110 \text{ olika sätt}$$

Urval utan hänsyn till ordning - Kombinationer

Utan upprepning

Exempel 16

I en urna finns 20 röda och 30 blåa kulor. På hur många sätt kan man välja ut 5 kulor så att

- 1 alla är röda?
- 2 3 är röda och 2 är blåa?
- 3 minst 3 är röda?

Lösning:

Additions- och multiplikationsprinciperna \Rightarrow

$$1 \quad \binom{20}{5} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15504 \text{ olika sätt}$$

$$2 \quad \binom{20}{3} \cdot \binom{30}{2} = 495900 \text{ olika sätt}$$

$$3 \quad \binom{20}{3} \cdot \binom{30}{2} + \binom{20}{4} \cdot \binom{30}{1} + \binom{20}{5} \cdot \binom{30}{0} = 656754 \text{ olika sätt}$$

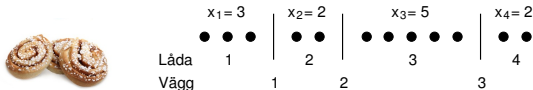
Urval utan hänsyn till ordning

Med upprepning

Exempel 17 (Dela ut bullar)

12 bullar ska delas ut till de fyra duktiga studenterna A, B, C och D. På hur många sätt kan detta ske?

- Vi lägger bullarna i 4 lådor med $x_1 = \#$ bullar i låda 1 (till student A) osv
 \Rightarrow Vi söker antalet icke-negativa heltalslösningar till $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$
- Lägg de 12 bullarna på rad och placera ut $4 - 1 = 3$ lådväggar



- # sätt att fördela de $12 + 4 - 1 = 15$ symbolerna (12 bullar + 3 väggar)

$$\frac{(12 + 4 - 1)!}{12!(4 - 1)!} = \binom{4 + 12 - 1}{12} = \binom{15}{12} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$$

Jfr Ex 11: Antal olika ord med 15 bokstäver mha 12 A:n och 3 B:n är $\frac{15!}{12!3!}$

Urval utan hänsyn till ordning

Med upprepning

Allmänt fördelningsproblem:

På hur många sätt kan r st identiska kulor placeras ut i n st olika lådor?

Alternativ formulering:

På hur många sätt kan man välja ut r kulor från en samling med n kulor utan hänsyn till ordningen och med återläggning?

- Sätt $x_i =$ antalet gånger kula nr i väljs \Rightarrow
- Svaret är återigen antalet icke-negativa heltalslösningar till

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

Urval utan hänsyn till ordning

Med upprepning

Sammanfattning:

Antalet sätt att placera ut r st identiska kulor i n st olika lådor

= Antalet icke-negativa heltalslösningar till

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

= Antalet sätt att välja ut r st kulor från n st utan hänsyn till ordningen och med upprepning tillåten

$$= \binom{n+r-1}{r}$$

Urval utan hänsyn till ordning

Med upprepning

Exempel 18 (Dela ut 12 bullar igen)

Varje student ska nu ha minst en bulle.

- Dela ut en var. Då återstår 8 bullar att dela ut dvs $r = 8$, $n = 4$
- # sätt att fördela dessa på är

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{4+8-1}{8} = \binom{11}{8} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$$

Urval utan hänsyn till ordning

Med upprepning

Exempel 19 (Ytterligare ett bullproblem...)

På hur många sätt kan vi dela ut **högst** 12 bullar till de duktiga studenterna?

Vi söker alltså antalet icke-negativa heltalslösningar till **olikheten**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12$$

Inför hjälpvariabeln x_5 och studera ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$:

- icke-negativa heltalslösningar $\Rightarrow 0 \leq x_5 \leq 12$
- $x_5 = 0 \Rightarrow x_1 + \dots + x_4 = 12$, $x_5 = 1 \Rightarrow x_1 + \dots + x_4 = 11$, osv

Problemet är alltså ekvivalent med att hitta antalet icke-negativa heltalslösningar till **ekvationen**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

Vi får

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{5+12-1}{12} = \binom{16}{12} = \binom{16}{4} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1820 \text{ sätt}$$

Urval utan hänsyn till ordning

Med upprepning

Exempel 20

Hur många olika kastserier kan göras med 4 tärningar?

Lösning:

Vi ska göra 4 urval ($r = 4$) bland 6 element ($n = 6$) med återläggning och ordningen är oväsentlig.

Sätter vi $x_1 = \# 1\text{:or}$, $x_2 = \# 2\text{:or osv}$, söker vi # icke-negativa heltalslösningar till

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4$$

$$\Rightarrow \# \text{ olika kastserier} = \binom{6 + 4 - 1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Urval utan hänsyn till ordning

Med upprepning

Exempel 21

Vilket värde har a då programmet exekverats?

```
a = 0
```

```
for i = 1 to 25
```

```
  for j = 1 to i
```

```
    for k = 1 to j
```

```
      a = a + 1
```

- a ökar med 1 för varje taltrippel (i, j, k) , $1 \leq k \leq j \leq i \leq 25$
- # taltripplar = # urval av $r = 3$ tal bland $n = 25$ tal, upprepning tillåten, ej hänsyn till ordningen
= # icke-negativa heltalslösningar till $x_1 + x_2 + \dots + x_{25} = 3$

$$\Rightarrow a = \binom{n+r-1}{r} = \binom{25+3-1}{3} = \binom{27}{3} = 2925$$

De fyra huvudfallen:

Antalet sätt att välja ut r st objekt bland n stycken olika objekt:

Urval	med återläggning	utan återläggning
med hänsyn till ordn	n^r	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
utan hänsyn till ordn	$\binom{n+r-1}{r}$	$\binom{n}{r}$

$P(n, r) = \#$ permutationer av r element bland n element

$\binom{n}{r} = \#$ kombinationer av r element bland n element.

Binomialteoremet

Vi vet att

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

⋮

$$(a + b)^{100} = ?$$

Finns det ett snabbare sätt att utveckla $(a + b)^{100}$?

$$(a + b)^{100} = \underbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_{100 \text{ st faktorer}}$$

Multiplikerar vi ihop parenteserna får vi termer av typen

$a^{100}, a^{99}b, a^{98}b^2, a^{97}b^3, \dots, ab^{99}, b^{100}$ dvs $a^{100-r}b^r, r = 0, 1, 2, 3, \dots, 100$

- Vi får en term $a^{100} \Rightarrow$ **Koefficienten framför a^{100} är $\binom{100}{0}$**
- Vi får termer av typen $a^{99}b$ genom att multiplicera ett b ur en parentes med 99 a :n från de övriga.
Parentesen med b kan väljas ut på $\binom{100}{1}$ olika sätt
 \Rightarrow **Koefficienten framför $a^{99}b$ blir $\binom{100}{1}$**
- Vi får termer av typen $a^{98}b^2$ genom att multiplicera två b :n ur två parenteser med 98 a :n från de övriga.
Parenteserna med b :n kan väljas ut på $\binom{100}{2}$ olika sätt
 \Rightarrow **Koefficienten framför $a^{98}b^2$ blir $\binom{100}{2}$**
- Vi får termer av typen $a^{100-r}b^r$ genom att multiplicera r st b :n som väljs bland r parenteser med $(100 - r)$ st a :n som väljs bland de övriga.
De r parenteserna kan väljas på $\binom{100}{r}$ olika sätt
 \Rightarrow **Koefficienten framför $a^{100-r}b^r$ blir $\binom{100}{r}$**

Sats 2 (Binomialteoremet)

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r\end{aligned}$$

Koefficienterna $\binom{n}{r}$ kallas *binomialkoefficienter*

Några samband mellan binomialkoefficienter:

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{n}{n-r} &= \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} \\ \binom{n+1}{r} &= \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} = \dots = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \quad (\text{Pascals triangel})\end{aligned}$$

Binomialteoremet

Pascals triangel

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

kan användas vid beräkning av binomialkoefficienter:

$n = 0$											$\binom{0}{0}$											1								
$n = 1$											$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$											1	1						
$n = 2$											$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$											1	2	1				
$n = 3$											$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$											1	3	3	1		
$n = 4$											$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$											1	4	6	4	1
$n = 5$	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$											1	5	10	10	5	1								

Exempel 22

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Exempel 23

Bestäm koefficienten framför x^3 i $(x + \frac{3}{x})^7$

Lösning:

- Allmän term: $\binom{7}{r} x^{7-r} (\frac{3}{x})^r = \binom{7}{r} x^{7-2r} 3^r$
- $7 - 2r = 3 \Leftrightarrow r = 2$

∴ Koefficienten framför x^3 blir: $\binom{7}{2} 3^2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} 3^2 = 21 \cdot 9 = 189$