MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om komplexa tal

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

16 oktober 2024

Den imaginära enheten i

Det finns inga *reella* tal som uppfyller ekvationen $x^2 + 1 = 0$.

Vi inför den imaginära enheten i med egenskapen

$$i^2 = -1$$

Ekvationen $x^2 + 1 = 0$ har då lösningen $x^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x = \pm i$

Exempel 1

Lös ekvationen $x^2 + 4 = 0$.

Lösning:

$$x^2 = -4 = (-1) \cdot 4 = i^2 \cdot 4 \Leftrightarrow x = \pm 2i$$

Det komplexa talområdet

Exempel 2

Lös ekvationen $x^2 + 2x + 10 = 0$.

Lösning:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 10 &= (x+1)^2 - 1 + 10 = (x+1)^2 + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 &= -9 = (-1)9 = i^2 9 \\ \Leftrightarrow x + 1 &= \pm 3i \\ \Leftrightarrow x &= -1 \pm 3i \end{aligned}$$

Lösningarna består av en reell del (-1) och en imaginär del (3 respektive -3).

Anm: pq-formeln om $(\frac{p}{2})^2 < q$:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x + \tfrac{p}{2})^2 - (\tfrac{p}{2})^2 + q = 0 \\ \Leftrightarrow (x + \tfrac{p}{2})^2 &= \underbrace{(\tfrac{p}{2})^2 - q}_{<0} = \underbrace{i^2}_{=-1} \underbrace{(q - (\tfrac{p}{2})^2)}_{>0} \\ \Leftrightarrow x &= -\tfrac{p}{2} \pm i\sqrt{q - (\tfrac{p}{2})^2} \end{aligned}$$

Det komplexa talområdet

Definition 1 (Komplexa talområdet)

Mängden av tal $z = a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$, kallas det komplexa talområdet $\mathbb{C}$.

- $a =$ realdelen av z ($\operatorname{Re} z$)
- $b =$ imaginärdelen av z ($\operatorname{Im} z$)

Om $\operatorname{Re} z = 0$ är z imaginärt.

Anm:

- Imaginärdelen av ett komplext tal är ett *reellt tal*:
  Ex: $z = 2 - 3i \Rightarrow \operatorname{Im} z = -3$
- De reella talen är de komplexa tal vars imaginärdel är noll
  $\Rightarrow \mathbb{R}$ är en äkta delmängd av $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Räkneregler för komplexa tal

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Definition 2 (Räkneregler)

Om $z_1 = a + ib$ och $z_2 = c + id$ är två komplexa tal och x ett reellt tal så definierar vi *likhet*, *addition, subtraktion* och *multiplikation* enligt:

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ och $b = d$
2. $xz_1 = xa + ixb$
3. $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$
4. $z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2$
5. $z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = ac - bd + i(ad + bc)$

Sats 1

Lagarna för addition, multiplikation och subtraktion av reella tal gäller också för komplexa tal.

Anm: Vi kan alltså räkna med komplexa tal precis som med reella om vi tar hänsyn till att $i^2 = -1$.

Räkneregler för komplexa tal

Exempel 3

Bestäm $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ och $z_1 - z_2$ om $z_1 = 2 + 3i$ och $z_2 = 5 - 4i$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= 2 + 3i + 5 - 4i = 7 - i \\
z_1 \cdot z_2 &= (2 + 3i)(5 - 4i) = 10 - 8i + 15i - 12i^2 = 22 + 7i \\
z_1 - z_2 &= z_1 + (-1)z_2 = 2 + 3i + (-1)(5 - 4i) = -3 + 7i
\end{aligned}$$

Komplexa tal och olikheter

Kan vi definiera olikheter för komplexa tal som uppfyller de vanliga lagarna för olikheter mellan reella tal?
För $a, b, c \in \mathbb{R}$ har vi t ex

$$c > 0 \text{ och } a < b \Rightarrow ac < bc \qquad (\text{Ex:} \quad 2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot 4 < 3 \cdot 4)$$

Vi väljer talen 0 och i:

- $i \neq 0 \Rightarrow i > 0$ eller $i < 0$
- Antag att $i > 0$:

$$\Rightarrow 0 = \underset{a}{0} \cdot \underset{c}{i} < \underset{b}{i} \cdot \underset{c}{i} = i^2 = -1 \text{ orimligt!}$$

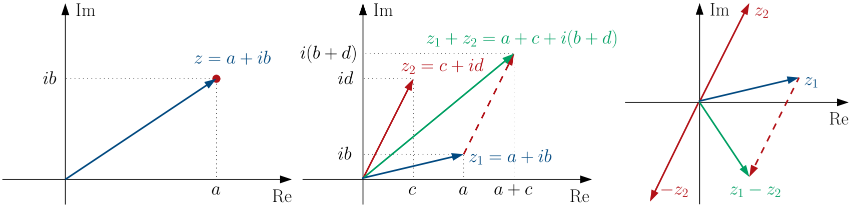
- Antag istället att $i < 0 \Leftrightarrow -i > 0$:

$$\Rightarrow 0 = \underset{a}{0} \cdot (\underset{c}{-i}) < (\underset{b}{-i}) \cdot (\underset{c}{-i}) = i^2 = -1 \text{ orimligt!}$$

Slutsats: Det går inte att definiera en ordningsrelation på $\mathbb{C}$ som uppfyller de vanliga ordningslagarna på $\mathbb{R}$. Uttryck av typen $z_1 < z_2$ har ingen mening om vi med ”$<$” menar den vanliga ordningsrelationen på $\mathbb{R}$.

Det komplexa talplanet

- Ett komplext tal $z = a + ib$ kan tolkas geometriskt som en punkt (a, b) eller en vektor i det komplexa talplanet
- x-axeln kallas den reella axeln och y-axeln den imaginära axeln
- Addition av två komplexa tal z_1 och z_2 motsvaras av vektoraddition

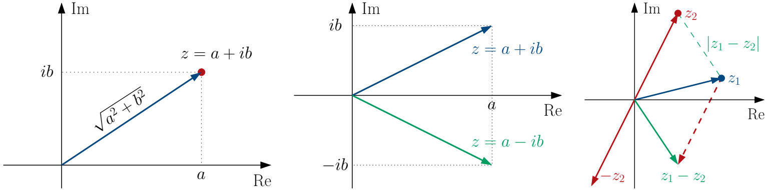


Addition

Subtraktion

Absolutbelopp och konjugat

- Avståndet mellan talet (punkten) $z = a + ib$ och origo är $\sqrt{a^2 + b^2}$
- Spegelbilden av talet $z = a + ib$ i den reella axeln är talet $a - ib$



Definition 3

Om $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, kallas

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ absolutbeloppet av z
- $\bar{z} = a - ib$ komplexkonjugatet till z

- $|z_1 - z_2|$ är avståndet mellan punkterna z_1 och z_2
- Om $z = x$ där $x \in \mathbb{R}$ är

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x|$$

Absolutbelopp och konjugat

Exempel 4

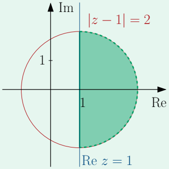
Bestäm $z \cdot \bar{z}$, $|\bar{z}|$, $z + \bar{z}$ och $z - \bar{z}$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
z \cdot \bar{z} &= (a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iba - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \\
|\bar{z}| &= \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\
z + \bar{z} &= a + ib + a - ib = 2a = 2\mathrm{Re}\, z \\
z - \bar{z} &= a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\mathrm{Im}\, z
\end{aligned}$$

Exempel 5

Rita mängden av de komplexa tal z för vilka $|z-1| < 2$ och $\mathrm{Re}\, z \geq 1$.



Absolutbelopp och konjugat

Exempel 6

Lös ekvationen $2z + i\bar{z} = 4 - i$.

Lösning:

Sätt $z = a + ib$

$$\Rightarrow 2z + i\bar{z} \quad = \quad 2(a+ib) + i(a-ib) = 2a + b + i(2b + a) = 4 - i$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a + b & = 4 \\ 2b + a & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 3 \\ b & = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 3 - 2i$$

Division

Exempel 7

Hur ska vi definiera kvoten $\dfrac{5+15i}{1-3i}$?

Lösning:

Om vi antar att vi kan räkna på som vanligt:

$$\frac{5+15i}{1-3i} = \frac{(5+15i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-40+30i}{(-1)^2+3^2} = \frac{-40+30i}{10} = -4+3i$$

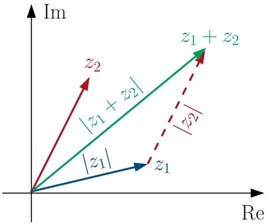
Definition 4 (Division)

Om z_1 och $z_2 \neq 0$ är två komplexa tal så definierar vi *kvoten* mellan z_1 och z_2 enligt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2}$$

Triangelolikheten

Från den geometriska tolkningen av komplexa tal får vi:



Sats 2 (Triangelolikheten)

För alla komplexa tal z_1 och z_2 gäller

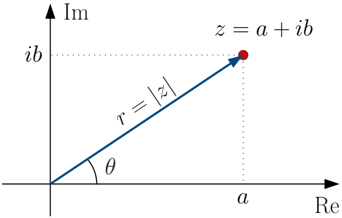
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Exempel 8

Visa att om $|z| = 1$ så är $|z + 3 + 4i| \leq 6$. Rita figur!

Komplexa tal på polär form

Den geometriska tolkningen ger oss ett alternativt sätt att representera ett komplext tal z:



$$\Rightarrow \begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{z = \underbrace{a + ib}_{\text{Rektangulär form}} = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{Polär form}}}$$

- θ kallas argumentet för z ($\arg z$) och räknas positiv om den motsvaras av en vridning moturs från den reella axeln.
- θ är inte entydig: $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos(\theta + n\cdot 2\pi) + i\sin(\theta + n \cdot 2\pi))$.
- Argumentet θ för vilket $-\pi < \theta \leq \pi$ kallas principalargumentet.

Komplexa tal på polär form

Exempel 9

Skriv talet $2 - 2i$ på polär form.

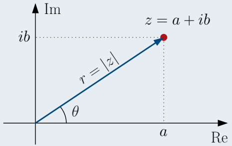
Lösning:

$z = 2 - 2i \Rightarrow$

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta & = \frac{2}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta & = \frac{-2}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \text{ vi kan välja } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$



$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \ \sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Anm: Principalargumentet i exemplet ovan är $-\frac{\pi}{4}$.

Den komplexa exponentialfunktionen

Definition 5

Om $z = a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$, så sätter vi

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

- e^z överensstämmer med den reella exponentialfunktionen om $z \in \mathbb{R}$
- Ett komplext tal på polär form kan nu skrivas som

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Definition 5 ger:

Eulers formler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Den komplexa exponentialfunktionen

Sats 3 (Potenslagar)

För två godtyckliga komplexa tal z, z_1 och z_2 gäller

1. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.
2. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.
3. $(e^z)^n = e^{nz}$, *där n är ett heltal (de Moivres formel).*

Om $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ och $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ får vi

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}$$

Vid multiplikation/division av två komplexa tal i polär form:

- multipliceras/divideras absolutbeloppen
- adderas/subtraheras argumenten

Den komplexa exponentialfunktionen

Exempel 10

Om $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ och $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ vad blir $z_1 \cdot z_2$ och $\dfrac{z_1}{z_2}$?

Lösning:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot 3e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})} = 6e^{i\frac{7\pi}{12}} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

Exempel 11

Skriv talet $(1+i)^{24}$ på rektangulär form.

Lösning:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1+i)^{24} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{24} = \sqrt{2}^{24}e^{i\frac{24\pi}{4}} = 2^{12}e^{i6\pi} = 2^{12} = 4096$$

Den komplexa exponentialfunktionen

Exempel 12

Förenkla $z = \dfrac{i(\sqrt{3}-i)^3}{(-1+i)^2}$. Ange svaret på rektangulär och polär form.

Lösning:

$$\begin{aligned}
|z| &= \frac{|i|\cdot|\sqrt{3}-i|^3}{|-1+i|^2} = \frac{1\cdot 2^3}{\sqrt{2}^2} = 4 \\
\arg z &= \arg(i) + 3\arg(\sqrt{3}-i) - 2\arg(-1+i) = \frac{\pi}{2} + 3(-\frac{\pi}{6}) - 2\frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2} \\
\Rightarrow z &= 4e^{i\frac{\pi}{2}} = = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 4i
\end{aligned}$$

Den komplexa exponentialfunktionen

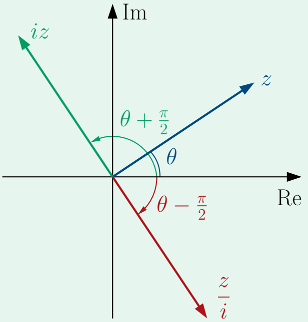
Exempel 13

Vad innebär multiplikation och division med talet i för den grafiska tolkningen av komplexa tal?

Lösning:

$$z = re^{i\theta} \text{ och } i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} iz &= re^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{2}} = re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \\ \frac{z}{i} &= \frac{re^{i\theta}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = re^{i\theta}e^{-i\frac{\pi}{2}} = re^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$



Multiplikation/division med i motsvaras av en vridning moturs/medurs av vektorn z vinkeln $\frac{\pi}{2}$.

Binomiska ekvationer

Exempel 14

Lös ekvationen $z^2 = 2i$.

Lösning:

$$
\begin{aligned}
z &= a + ib \Rightarrow z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 2i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 &= 0 \quad (1) \\ 2ab &= 2 \quad (2) \end{cases}
\end{aligned}
$$

(2) $\Rightarrow a = 1/b$. Insättning i (1) $\Rightarrow b^4 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$.
Enligt (2) har a och b har samma tecken och vi får lösningarna $z = \pm(1+i)$.

- Ekvationen $z^n = w$, där $w \in \mathbb{C}$ och $n \in \mathbb{Z}$, kallas en binomisk ekvation.
- För högre $n > 2$ blir det jobbigt att lösa binomiska ekvationer med metoden ovan. Det är bättre att gå över till polär form.

Binomiska ekvationer

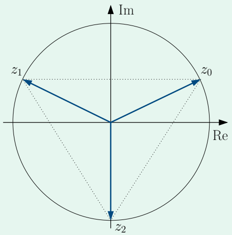
Exempel 15

Lös ekvationen $z^3 = 8i$.

Lösning:

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \text{ och } 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z^3 = r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 8^{1/3} = 2 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

där k är ett godtyckligt heltal.



$$\begin{aligned} k &= 0: \quad z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i \\ k &= 1: \quad z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i \\ k &= 2: \quad z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 2(0 - i) = -2i \\ k &= 3: \quad z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_0 \end{aligned}$$

Binomiska ekvationer

Allmänna fallet $z^n = w$: $z = re^{i\theta}$ och $w = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} z^n &= (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = w = \rho e^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow z_k &= \rho^{1/n} e^{i(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})}, \; k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Anm:

$$z_{k=n} = \rho^{1/n} e^{i(\frac{\varphi}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n})} = \rho^{1/n} e^{i(\frac{\varphi}{n} + 2\pi)} = \rho^{1/n} e^{i\frac{\varphi}{n}} = z_0$$

Ekvationen $z^n = w$ har alltså precis n st olika lösningar.

Sats 4 (Binomiska ekvationer)

Den binomiska ekvationen $z^n = w = \rho e^{i\theta}$ har rötterna

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})}, \; k = 0, 1, ..., n-1$$

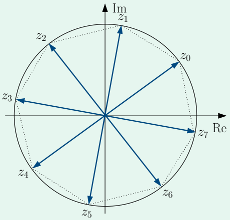
Anm: $|z_k| = \rho^{1/n}$ och vinkeln mellan två närliggande rötter är $\frac{2\pi}{n}$
$\Rightarrow$ rötterna bildar hörn i en regelbunden n-hörning inskriven i en cirkel med medelpunkt i origo och radie $\rho^{1/n}$.

Binomiska ekvationer

Exempel 16

Lös ekvationen $z^8 = 1 - \sqrt{3}i$ och rita in rötterna i det komplexa talplanet.

Lösning:



$$
\begin{aligned}
1 - \sqrt{3}i &= 2e^{i\frac{5\pi}{3}} \\
\Rightarrow z_k &= 2^{1/8}e^{i\left(\frac{5\pi}{24} + k\cdot\frac{\pi}{4}\right)},\ k = 0, 1, 2, ..., 7.
\end{aligned}
$$

Något mer om rötter

- $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Den positiva roten 2 betecknas $\sqrt{4}$
- Kan vi definiera $\sqrt{z}$ entydigt på motsvarande sätt?

$$x^n = z = re^{i\theta} \text{ har rötterna } x_k = r^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})},\ k = 0, 1, ..., n-1$$

Om $-\pi < \theta \leq \pi$ (principalargumentet till z) kan man definiera principalroten som x_0:

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

- Ex: Kvadratroten av -1 (principalroten):

$$-1 = e^{i\pi} \Rightarrow \sqrt{-1} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Ekvationen $z^2 + 1 = 0$ har alltså rötterna $z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Varning!

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1 \quad ?!?$$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ gäller generellt endast om a och b är icke-negativa realla tal!

Andragradsekvationer med komplexa koefficienter

Exempel 17

Lös ekvationen $iz^2 + (2-3i)z - 1 + 5i = 0$.

Lösning:

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{2-3i}{i}z - \frac{1-5i}{i} &= z^2 - (2i+3)z + i + 5 \\ &= \left(z - \frac{3+2i}{2}\right)^2 - \left(\frac{3+2i}{2}\right)^2 + 5 + i = 0 \\ \Leftrightarrow \left(z - \frac{3+2i}{2}\right)^2 &= -(5+i) + \left(\frac{3+2i}{2}\right)^2 = -\frac{15}{4} + 2i \end{aligned}$$

Sätt $z - \dfrac{3+2i}{2} = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = -\dfrac{15}{4} + 2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -\dfrac{15}{4} & (1) \\ xy = 1 & (2) \end{cases}$$

Andragradsekvationer med komplexa koefficienter

Exempel 17 (forts)

(2) $\Rightarrow x = \dfrac{1}{y}$ Insättning i (1):

$$\frac{1}{y^2} - y^2 = -\frac{15}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y^4 - \frac{15}{4}y^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{15}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 1} \underset{y^2 \geq 0}{=} \frac{15}{8} + \frac{17}{8} = 4$$

x och y är reella och har samma tecken enligt (2):

$$\Rightarrow y = \pm 2,\ x = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z - \frac{3+2i}{2} = \pm\left(\frac{1}{2} + 2i\right) \Leftrightarrow z = \frac{3+2i}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + 2i\right)$$

$\therefore z_1 = 2 + 3i$ och $z_2 = 1 - i$

Polynom och algebraiska ekvationer

- Vi skall nu studera allmänna algebraiska ekvationer:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

där $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

- För ekvationer av grad ≤ 4 finns formler för rötterna.
- För $n \geq 5$ går det inte att bestämma rötterna med en formel.

Anm:

Niels Henrik Abel (1802-1829) bevisade att det inte går att bestämma rötterna till allmänna algebraiska ekvationer av grad ≥ 5 med algebraiska operationer, dvs med en formel som utgår från ekvationens koefficienter (som pq-formeln för $n = 2$).

Polynom och algebraiska ekvationer

Definition 6 (Polynom)

En funktion

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

där $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ och $n \in \mathbb{N}$ kallas en *polynomfunktion* eller ett *polynom*. Om $a_n \neq 0$ har polynomet grad n.

Exempel 18

$p(z) = 5z^4 - 3iz^2 + (2 - 4i)z - 2 + i$ är ett polynom av grad 4.

Sats 5 (Divisionsalgoritmen)

Om p och f är två polynom och $f \neq 0$ så finns det polynom q och r sådana att

$$p(z) = f(z)\underbrace{q(z)}_{kvot} + \underbrace{r(z)}_{rest} \quad \textit{med grad } r < \textit{ grad } f.$$

Polynom och algebraiska ekvationer

Exempel 19

Ange kvoten och resten då $p(z) = z^3 - 2z^2 + z + 1$ divideras med $f(z) = z^2 + z$.

Lösning:

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|llll}
 & & & z & -\,3 \\ \hline
z^2 + z) & z^3 - 2z^2 & + z + 1 & & \\
 & -\,z^3 - z^2 & & & \\ \hline
 & -\,3z^2 & + z & & \\
 & 3z^2 & + 3z & & \\ \hline
 & & 4z + 1 & &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow p(z) = z^3 - 2z^2 + z + 1 = (z^2 + z)(z - 3) + 4z + 1$$

$\therefore$ Kvoten är $q(z) = z - 3$ och resten $r(z) = 4z + 1$

Anm: grad $r = 1 <$ grad $f = 2$.

Faktorsatsen

Definition 7

En *algebraisk ekvation* är en ekvation av typen

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0.$$

Ett tal $\alpha \in \mathbb{C}$ kallas ett *nollställe* till polynomet $p(z)$ eller en *rot* till ekvationen $p(z) = 0$ om $p(\alpha) = 0$.

Sambandet mellan nollställen till och faktorisering av polynom ges av:

Sats 6 (Faktorsatsen)

Om $p(z)$ är ett polynom så gäller

$$p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow p(z) = q(z)(z - \alpha)$$

där $q(z)$ är ett polynom med grad q = grad $p - 1$.

Faktorsatsen

Exempel 20

Ekvationen $p(z) = z^3 - (3+i)z^2 + (2+3i)z - 2i = 0$ har en rot $z = i$. Lös ekvationen.

Lösning:

Enligt faktorsatsen är $z - i$ en faktor i $p(z)$. Polynomdivision ger:

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-i)(z^2 - 3z + 2) \\ z^2 - 3z + 2 &= 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ eller } z = 2 \end{aligned}$$

Ekvationen har alltså rötterna $z_1 = i$, $z_2 = 1$ och $z_3 = 2$.

Polynom och algebraiska ekvationer

Exempel 21

Lös ekvationen $p(z) = z^3 - 2z^2 + z = 0$.

Lösning:

$$\begin{aligned} p(z) &= z^3 - 2z^2 + z = z(z^2 - 2z + 1) = z(z-1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow z &= 0 \text{ eller } z = 1. \end{aligned}$$

$(z-1)^2$ är en faktor i $p(z)$

$\Rightarrow z = 1$ är ett nollställe med multiplicitet 2 eller en dubbelrot till $p(z) = 0$

Definition 8

Om $p(z)$ är ett polynom och $(z-\alpha)^k$ är en faktor i $p(z)$ men inte $(z-\alpha)^{k+1}$, $k \geq 1$, så har $p(z)$ nollstället α av multiplicitet k.

Algebrans fundamentalsats

Hur många nollställen har ett polynom av grad n?

Sats 7 (Algebrans fundamentalsats)

Om $p(z)$ är ett polynom av grad ≥ 1 finns det ett $\alpha \in \mathbb{C}$ sådant att $p(\alpha) = 0$.

Faktorsatsen kombinerad med och algebrans fundamentalsats ger:

Sats 8

Varje polynom $p(z)$ av grad $n \geq 1$ har exakt n nollställen i $\mathbb{C}$ om varje nollställe räknas med sin multiplicitet.

Anm:

Algebrans fundamentalsats bevisades av 1799 av den tyske matematikern Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) i sin doktorsavhandling. Gauss anses vara en av de största matematikerna genom tiderna.

Algebrans fundamentalsats

- Varje algebraisk ekvation av grad n har exakt n rötter.
- Om $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, $(a_n \neq 0,\ n \geq 1)$ har nollstället z_1 med multiplicitet k_1, z_2 med multiplicitet k_2, ... så är

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + ... + k_m = n \\ p(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m} \end{cases}$$

Exempel 22

Ange ett polynom av minsta möjliga grad som har $z = 0$ som nollställe av multiplicitet 3, $z = 1$ som dubbelt nollställe och $z = i$ som enkelt nollställe.

Lösning:

Vi kan t ex ta polynomet

$p(z) = z^3 (z-1)^2 (z-i) = z^6 - (2+i) z^5 + (1+2i) z^4 - i z^3$

Samband mellan nollställen och koefficienter

Faktorsatsen ger samband mellan nollställen och koefficienter:

Exempel 23

Om $p(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ har nollställena α_1 och α_2 så är:

$$
\begin{aligned}
p(z) &= a_2z^2 + a_1z + a_0 = a_2(z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \\
&= a_2z^2 - a_2(\alpha_1+\alpha_2)z + a_2\alpha_1\alpha_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 &= -\dfrac{a_1}{a_2} \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= \dfrac{a_0}{a_2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Samband mellan nollställen och koefficienter

- För ett polynom av grad n gäller motsvarande samband
- Koefficientidentifieringen för 2:a-gradspolynomet gav två samband
- För ett n:te grads polynom får vi n samband
- För $n = 3$,

$$p(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

och nollställena α_1, α_2 och α_3 får vi

$$\begin{aligned}
p(z) &= a_3(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3) = \dots \\
&= a_3 z^3 - a_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z^2 + a_3(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)z - a_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3 & = \dfrac{a_1}{a_3} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 & = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Samband mellan nollställen och koefficienter

Exempel 24

Ekvationen $z^3 - kz^2 + kz - 2 = 0$ har rötterna α_1, α_2 och α_2. Visa att

$$\alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_2(1-\alpha_3) + \alpha_3(1-\alpha_1) = 0$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(1-\alpha_2) &+ \alpha_2(1-\alpha_3) + \alpha_3(1-\alpha_1) \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3) \\
&= -\frac{a_2}{a_3} - \frac{a_1}{a_3} = -(-k) - k = 0
\end{aligned}$$

I det allmänna fallet får vi följande samband för rötternas summa och produkt

$$\begin{cases}
\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\
\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n & = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}
\end{cases}$$

Algebraiska ekvationer med reella koefficienter

Exempel 25

Lös ekvationen $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Lösning:

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 5 &= (z-1)^2 - 1 + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z-1)^2 = -4 \\ &\Leftrightarrow z - 1 = \pm 2i \end{aligned}$$

$\therefore z_0 = 1 + 2i$ och $\bar{z}_0 = 1 - 2i$ dvs rötterna är varandras konjugat.

Algebraiska ekvationer med reella koefficienter

Gäller detta allmänt?

Antag att $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ har nollstället z_0:

$$
\begin{aligned}
p(z_0) &= a_n z_0^n + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0 \\
\Rightarrow 0 = \bar{0} = \overline{p(z_0)} &= \overline{a_n z_0^n + \ldots + a_1 z_0 + a_0} \\
&= \overline{a_n z_0^n} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \bar{a}_0 \quad \leftarrow \text{konjugeringsreglerna} \\
&= a_n \bar{z}_0^n + \ldots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 \quad \leftarrow \text{alla koeff. är reella} \\
&= p(\bar{z}_0)
\end{aligned}
$$

Sats 9

Om $p(z)$ är ett polynom med reella koefficienter och om $p(z)$ har nollstället $z_0 = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$ så har $p(z)$ även nollstället $\bar{z}_0 = a - ib$.

Anm: Enligt Sats 9 har nollställena z_0 och $\bar{z}_0$ samma multiplicitet.

Algebraiska ekvationer med reella koefficienter

Exempel 26

Polynomet $p(z) = z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 8z - 8$ har ett nollställe $z_0 = -1 + i$. Lös ekvationen $p(z) = 0$.

Lösning:
$p(z)$ har reella koefficienter $\Rightarrow \bar{z}_0 = -1 - i$ är också ett nollställe enligt Sats 9.
Faktorsatsen $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} (z - z_0)(z - \bar{z}_0) &= z^2 - z\bar{z}_0 - z_0 z + z_0\bar{z}_0 = z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0 \\ &= z^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)z + |z_0|^2 = z^2 + 2z + 2 \end{aligned}$$

är en faktor i $p(z)$.

Polynomdivision $\Rightarrow p(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 4)$.
$p(z) = 0$ har alltså rötterna $z = -1 \pm i$ och $z = \pm 2$.

Algebraiska ekvationer med reella koefficienter

Exempel 27

Bestäm konstanten a så att polynomet

$$p(z) \quad = \quad z^4 - 3z^3 + z^2 + az - 2$$

får faktorn $z^2 - 2z + 1$. Lös därefter ekvationen $p(z) = 0$ fullständigt.

Lösning:
$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$ är en faktor $p(z)$ omm $z = 1$ är ett nollställe till $p(z)$

$$p(1) = 1 - 3 + 1 + a - 2 = a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3.$$

Polynomdivision $\Rightarrow p(z) = (z^2 - 2z + 1)(z^2 - z - 2)$

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 1 \text{ eller } z^2 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -1,\ z_3 = 2$$