MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om logik och mängdlära

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

3 september 2024

Utsagor

Utsaga = Påstående som har sanningsvärde

Utsagan kan vara

- *sann* (S) eller *falsk* (F)
- *öppen* eller *sluten*

Exempel 1

- A: $5 \cdot 6 = 30$ Sann, Sluten
- B: Volvo är ett bilmärke Sann, Sluten
- C: $a + 2 = 6$ Sann om $a = 4$ annars falsk,
  Öppen utsaga (sanningsvärdet beror på a)
- D: Jag kan flyga Falsk, Sluten

Exempel 2

- A: $2x + 5$ Ingen utsaga!
- B: $x^2 + y^2 = 5$, Öppen utsaga
- C: $4 \geq 3$ Sluten utsaga (Sann!)

Konnektiv

Negation

Negationen till en utsaga A (skrivs $\neg A$) = motsatsen till A

Exempel 3

- $A : x \geq 2$
- $\neg A : x < 2$

Exempel 4

- A : Alla hundar kan skälla
- $\neg A$: Det finns (minst) en hund som inte kan skälla

Konnektiv

Konjunktion och disjunktion

Flera utsagor kan kombineras till en ny utsaga:

1. Konjunktion: $C = A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{och}}}{\wedge} B$: Sann om A och B är sanna
2. Disjunktion: $C = A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eller}}}{\vee} B$: Sann om A eller B är sanna

Sanningsvärdestabell för negation ($\neg$) , konjunktion ($\wedge$) och disjunktion ($\vee$):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
S	S	F	S	S
S	F	F	F	S
F	S	S	F	S
F	F	S	F	F

Exempel 5

- A: Sverige ligger i Asien (Falsk)
- B: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Sann)

$\therefore$ $A \wedge B$ är falsk, $A \vee B$ är sann

Konnektiv

Tautologi och kontradiktion

En sammansatt utsaga är en tautologi/kontradiktion om den alltid är sann/falsk oberoende av de ingående utsagornas sanningsvärde.

Exempel 6

Är utsagan $(\neg A \wedge (A \vee B)) \vee A$ en tautologi? Är det en kontradiktion?

Sanningsvärdestabell:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$\neg A \wedge (A \vee B)$	Tot
S	S	F	S	F	S
S	F	F	S	F	S
F	S	S	S	S	S
F	F	S	F	F	F

Svar: Utsagan är varken en tautologi eller en kontradiktion.

Exemplet ovan i Mathematica:

```
utsaga=(!a&&(a||b))||a;
BooleanTable[{a,b,!a,a||b,!a&&(a||b),utsaga},{a,b}]//TableForm
```

Konnektiv

Implikation och ekvivalens

Exempel 7

Utsagan ”Om $\underbrace{x = 5}_{A}$ så är $\underbrace{x^2 = 25}_{B}$” skrivs: $x = 5 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{implicerar}} x^2 = 25$

- Utsagan $A \Rightarrow B$ (medför, om ... så är) kallas en implikation
- A kallas förutsättning (premiss, hypotes) och B kallas slutsats (konsekvens).

Exempel 8

- $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ Sann
- $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ Falsk
  $A \Rightarrow B$ sann behöver inte betyda att omvändningen $B \Rightarrow A$ är sann.
- $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ Sann
  Den kontrapositiva formen $\neg B \Rightarrow \neg A$ är logiskt sett densamma som $A \Rightarrow B$
- $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$ Falsk

Anm: Om utsagan i VL är specifikt angiven menar vi att den är sann.

Konnektiv

Implikation och ekvivalens

Olika ekvivalenta formuleringar för $A \Rightarrow B$:

- A är ett tillräckligt villkor för B
- B är ett nödvändigt villkor för A
- A gäller endast då B gäller

Exempel 9

$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$

1. Att $x = 3$ är ett tillräckligt villkor för att $x^2 = 9$
2. Att $x^2 = 9$ är ett nödvändigt villkor för att $x = 3$
3. $x = 3$ gäller endast om $x^2 = 9$

Konnektiv

Implikation och ekvivalens

Exempel 10

$A : x^2 = 4, \quad B : (x = 2) \vee (x = -2)$

$$\left.\begin{array}{ll} A \Rightarrow B & \text{Sann} \\ B \Rightarrow A & \text{Sann} \end{array}\right\} A \Leftrightarrow B \quad \text{Sann}$$

$\therefore x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2) \vee (x = -2)$

- Utsagan $A \Leftrightarrow B$ kallas en ekvivalens
- $\Leftrightarrow$: Formuleras ”är ekvivalent med” eller ”om och endast om (omm)”

Sanningsvärdestabell för implikation och ekvivalens:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
S	S	S	S
S	F	F	F
F	S	S	F
F	F	S	S

Konnektiv

Exempel 11

- $A : x^2 \geq 4$
- $B : x \leq -1$
- $C : x > 1$

Avgör om utsagan $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$ är sann eller falsk. Är omvändningen sann?

Prioritetsordning for de logiska operatorerna

Regel: $\neg$ före $\wedge$ före $\vee$

Exempel 12

- $A \wedge B \vee C$ tolkas som $(A \wedge B) \vee C$
- $\neg A \wedge B$ tolkas som $(\neg A) \wedge B$

Vill man att uttrycket ska tolkas i annan ordning används parenteser.

De Morgans lagar

Exempel 13

Gör sanningsvärdestabell för utsagorna $\neg(A \vee B)$ och $\neg A \wedge \neg B$.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
S	S	F	F	S	F	F
S	F	F	S	S	F	F
F	S	S	F	S	F	F
F	F	S	S	F	S	S

Sats 1 (de Morgans Lagar)

För utsagorna A och B gäller

- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Kvantorer

Exempel 14

Utsagan A: ”Alla hundar kan skälla” kan skrivas som

$$A : \forall\,\text{hund} : \text{hunden kan skälla}$$

$\forall$: ”För varje”, ”för alla”:

Exempel 15

$\neg A$: Det finns minst en hund som inte kan skälla

$$\neg A : \exists\,\text{hund} : \text{hunden kan inte skälla}$$

$\exists$: ”Det finns (existerar) en/ett”

Exempel 16

A: För alla reella tal x gäller det att $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$$A : \forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

Kvantorer

Exempel 17

B: Det finns ett reellt tal x sådant att $2x = 4$

$$B : \exists\, x \in \mathbb{R} : 2x = 4$$

Mängder

Vad är en mängd?

- En mängd är en samling objekt som kallas element
- En mängd kan anges genom uppräkning av dess element inom $\{...\}$ eller genom en definierande utsaga
- Antalet element i en mängd A kallas mängdens kardinalitet och betecknas $|A|$
- Om x är ett element i mängden M skriver vi $x \in M$ (x tillhör M)
- Två mängder är lika om de innehåller samma element
- Den tomma mängden $\emptyset$ innehåller inga element
- Det finns alltid en grundmängd eller universum U

Exempel 18

- $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
- $B = \{1, 2, 3, ..., 99\}$
- $C = \{\text{Alla heltal } x \text{ sådana att } 1 \leq x \leq 3627\} = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 3627\}$

Mängder

Exempel 19

$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$

- $|A| = 4$
- $|B| = \infty$
- $2 \in A$
- $\frac{3}{2} \in B$
- $5 \notin B$

Exempel 20

- $\{1, 3, 4\} = \{1, 4, 3\} = \{4, 4, 3, 1\}$
- $|\{4, 4, 3, 1\}|$ = 3
- $\emptyset = \{\} = \{x : x \neq x\} = \{\text{Alla reella tal } x \text{ sådana att } x^2 = -1\}$ = ...

Talmängder

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$: De naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$: De hela talen
- $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$: De positiva hela talen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$: De rationella talen
- $\mathbb{R}$ = De reella talen
- $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$: De komplexa talen

Exempel 21

Intervall:

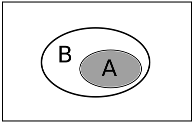
- $[-1, 9] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 9\}$: Slutet och begränsat (kompakt)
- $(2, 6) = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 6\}$: Öppet och begränsat
- $[1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 3\}$: Halvöppet och begränsat
- $[1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$: Slutet och obegränsat

Delmängd

Mängden A är en delmängd av B om och endast om varje element i A är ett element i B:

$$A \subseteq B \text{ omm } x \in A \Rightarrow x \in B$$

Om $A \subseteq B$ och $A \neq B$ så är A en äkta delmängd av B: $A \subset B$.



Venndiagram

Exempel 22

$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Exempel 23

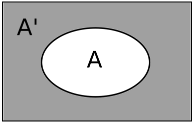
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$
$\Rightarrow \ A \subseteq B$.
$A \neq B \Rightarrow \ A \subset B$.

Anm: Den tomma mängden är en delmängd av varje mängd: $\emptyset \subseteq A \ \forall A$

Komplementmängd

Komplementet till A betecknas A' och består av alla element i U som inte finns i A:

$$A' = \{x : x \notin A\}$$



Exempel 24

Bestäm A' om $A = \{1, 3, 4, 6\}$ och $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Svar: $A' = \{2, 5, 7\}$

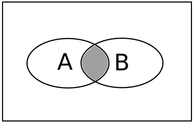
Exempel 25

Bestäm A' om $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ och $U = \mathbb{R}$.
Svar: $A' = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$

Snitt och Union

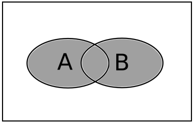
Snittet av två mängder A och B betecknas $A \cap B$ och består av alla element som finns i A och i B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



Unionen av två mängder A och B betecknas $A \cup B$ och består av alla element som finns i A eller i B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



Exempel 26

Bestäm $A \cap B$ och $A \cup B$ om $A = \{1, 3, 4, 8\}$ och $B = \{1, 2, 5, 8\}$.

- $A \cap B = \{1, 8\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

Om $A \cap B = \emptyset$ så är A och B disjunkta.

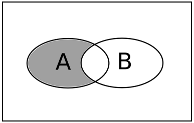
Sats 2 (de Morgans lagar)

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Mängddifferens och Produktmängd

Mängddifferensen $A \setminus B$ är mängden av alla element som finns i A men inte i B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



Produktmängden eller den Cartesiska produkten av mängderna A och B är mängden av alla ordnade par (a, b) där $a \in A$ och $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Exempel 27

Bestäm $A \setminus B$ och $A \times B$ om $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{3, 5\}$

- $A \setminus B = \{1, 2\}$
- $A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}$

Exempel 28

$B' \cap (A \cup B) = A \setminus B$