

MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om potenser

Mikael Hindgren



HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

7 oktober 2024

Potenser

Exempel 1

2^3 , e^2 , π^e är potenser.

Definition 1

Talet a^α kallas en **potens**. a kallas **basen** och α **exponenten**.

Exempel 2

- $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$
- $5^3 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 5^{3+2}$
- $\frac{5^5}{5^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 5^{5-2}$
- $(5^2)^3 = (5 \cdot 5)(5 \cdot 5)(5 \cdot 5) = 5^6 = 5^{2 \cdot 3}$

Potenser med heltalsexponent

Sats 1 (Potenslagar)

För positiva heltalsexponenter gäller:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ st}} \quad (1)$$

$$a^n a^m = a^{n+m} \quad (2)$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, m < n \quad (3)$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \quad (4)$$

$$a^n b^n = (ab)^n \quad (5)$$

$$a > 1, m < n \Rightarrow a^m < a^n \quad (6)$$

$$0 < a < b, n > 0 \Rightarrow a^n < b^n \quad (7)$$

- Hur ska vi definiera a^0 ? Om (2) skall gälla även för $m = 0$:

$$a^n \cdot a^0 = a^{n+0} = a^n \Leftrightarrow a^0 = 1$$

- Hur ska vi definiera a^n om $n < 0$? Om (3) skall gälla även för $m > n$:

$$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} \quad (8)$$

Räknelagarna (1) - (8) nu gäller för alla heltalsexponenter.

Potenser med rationell exponent

Definition 2

För alla $a > 0$ och heltal p och $q > 0$ sätter vi

- $a^{1/q} = \sqrt[q]{a} = \text{det positiva reella tal som är rot till } x^q = a$
- $a^{p/q} = (a^{1/q})^p$

Exempel 3

$$27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = \{\text{det positiva reella tal som är rot till ekvationen } x^3 = 27\} = 3$$

Exempel 4

$$27^{2/3} = (27^{1/3})^2 = 3^2 = 9$$

Anm: Man kan visa att

- $x^q = a$, där $a > 0$ och $q \in \mathbb{Z}^+$, har precis en positiv rot
- potenslagarna (1) - (8) gäller även för rationella exponenter

Potenser med rationell exponent

Exempel 5

Förenkla

$$2^{7/24} \sqrt[2]{2 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
 2^{7/24} \sqrt[2]{2 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}} &= 2^{7/24} \left(2 \left(2 \left(2^{1/4} \right) \right)^{1/3} \right)^{1/2} = 2^{7/24} \left(2 \left(2^{5/4} \right)^{1/3} \right)^{1/2} \\
 &= 2^{7/24} \left(2 \cdot 2^{5/12} \right)^{1/2} = 2^{7/24} \left(2^{17/12} \right)^{1/2} \\
 &= 2^{7/24} 2^{17/24} = 2^{7/24+17/24} = 2^1 = 2
 \end{aligned}$$

Potenser med irrationell exponent

Vad ska vi mena med 2^π ?

- π kan approximeras med ett rationellt tal till godtycklig noggrannhet:

$$\begin{aligned} \pi \approx r_1 &= \frac{3}{1} = 3 \\ r_2 &= \frac{31}{10} = 3.1 \\ r_3 &= \frac{314}{100} = 3.14 \\ r_4 &= \frac{3142}{1000} = 3.142 \\ r_5 &= \frac{31416}{10000} = 3.1416 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- π kan betraktas som gränsvärdet av en talföljd $\{r_n\}$ av rationella tal.
- Vi sätter

$$2^\pi = \text{gränsvärdet av } 2^{r_n} \text{ då } n \rightarrow \infty$$

Definition 3 (Potenser)

Om a är ett positivt reellt tal så definierar vi potensen a^α enligt:

① α är ett *positivt heltal*

- $a^\alpha = a \cdot a \cdot a \cdots a$ där antalet faktorer är α
- $a^0 = 1$
- $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$

② $\alpha = \frac{p}{q}$ där p och q är *heltal*, $q > 0$

- $a^\alpha = (a^{1/q})^p$
- $a^{1/q} =$ den entydigt bestämda positiva roten till ekvationen $x^q = a$

③ α är ett *irrationellt tal*

- $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ där $\{r_n\}$ är en talföljd av rationella tal med gränsvärdet α

Man kan visa att räknelagarna (1)- (8) för heltalsexponenter gäller för alla *positiva* reella tal a .

Potensfunktioner

Definition 4

Funktionen $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, kallas en **potensfunktion**.

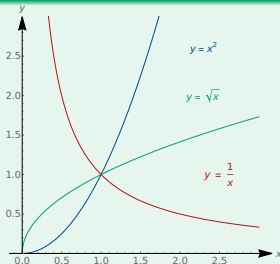
Exempel 6

$f(x) = x^2$, $x > 0$, $g(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, $h(x) = x^\pi$, $x > 0$, är potensfunktioner.

Exempel 7

Graferna till potensfunktionerna

- $f(x) = x^2$, $x > 0$
- $g(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$
- $h(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x > 0$



Anm: $g(x) = \sqrt{x}$ är invers till $f(x) = x^2$, $x > 0$.

Sats 2

Potensfunktionen $f(x) = x^\alpha$ är strängt växande om $\alpha > 0$ och strängt avtagande om $\alpha < 0$. Vidare gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{om } \alpha > 0 \\ 0 & \text{om } \alpha < 0 \end{cases}$$

Anm:

- Om $x_1 < x_2$ så är funktion $f(x)$ **växande** om $f(x_1) \leq f(x_2)$ och **strängt växande** om $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Avtagande** och **strängt avtagande** definieras på motsvarade sätt.
- Om $f(x)$ är (strängt) växande eller avtagande så är $f(x)$ (strängt) monoton.

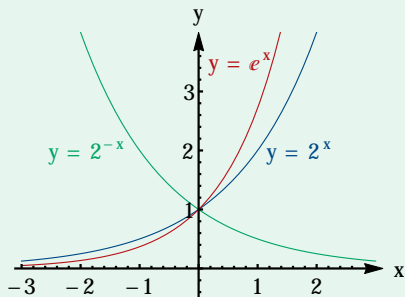
Definition 5

Funktionen $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, kallas en **exponentialfunktion**.

Exempel 8

Graferna till exponentialfunktionerna

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$
- $h(x) = e^x$



Exponentialfunktioner

Sats 3

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ är strängt växande om $a > 1$ och strängt avtagande om $0 < a < 1$. Vidare gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{om } a > 1 \\ 0 & \text{om } a < 1 \end{cases}$$

Exempel 9

Bestäm en funktion f vars värden fördubblas i varje intervall av längden 2 och som uppfyller $f(1) = 3$.

Lösning:

Ansats: $f(x) = Ca^x \Rightarrow f(1) = Ca = 3$

$$\Rightarrow f(1+2) = f(3) = Ca^3 = 2f(1) = 2Ca$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 2^{1/2} \Rightarrow C = 3 \cdot 2^{-1/2}$$

$$\therefore f(x) = 3 \cdot 2^{-1/2} \cdot \left(2^{1/2}\right)^x = 3 \cdot 2^{\frac{x-1}{2}}.$$

Logaritmfunktioner

Definition 6

Om $y = a^x$ där $a > 0$ och $a \neq 1$ så sätter vi

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Talet x kallas *a-logaritmen* för y .

Anm:

- För baserna 10 respektive e så skriver vi **lg** respektive **ln**. e -logaritmen kallas den naturliga logaritmen.
- Om $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ så är $f^{-1}(x) = \log_a x$

Exempel 10

- $\log_{10} 1000 = \lg 1000 = 3$
- $\lg 0.1 = -1$
- $\log_4 16 = 2$
- $\log_3 9 = 2$
- $\lg 1 = 0, \ln 1 = 0$
- $1000 = 10^3 = 10^{\lg 1000}$
- $3 = \lg 1000 = \lg 10^3$

Sats 4

För logaritmer gäller

$$\log_a 1 = 0$$

$$x = a^{\log_a x} = \log_a a^x, x > 0$$

Sats 5 (Logaritmlagarna)

För positiva tal x och y gäller

$$\begin{aligned}\log_a x + \log_a y &= \log_a xy & \log_a x^y &= y \log_a x \\ \log_a x - \log_a y &= \log_a \frac{x}{y} & \log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b}\end{aligned}$$

Exempel 11

$$3 \ln 2 - 2 \ln 3 = \ln 2^3 - \ln 3^2 = \ln \frac{2^3}{3^2} = \ln \frac{8}{9}.$$

Exempel 12

Lös ekvationen $\ln(2^x + 2^{x+1}) = 1$

Lösning:

$$\begin{aligned}\ln(2^x + 2^{x+1}) &= \ln(2^x + 2 \cdot 2^x) = \ln(3 \cdot 2^x) = \ln 3 + \ln 2^x \\ &= \ln 3 + x \ln 2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \ln 3}{\ln 2}\end{aligned}$$

Definition 7

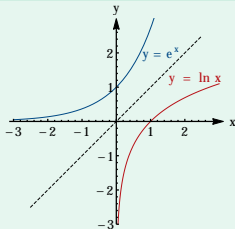
Funktionen $f(x) = \log_a x$, $a > 1$, $x > 0$, kallas en **logaritmfunktion**.

Exempel 13

Grafen till funktionen $f(x) = \ln x$

$f(x) = \ln x$ är invers till e^x

$\therefore y = \ln x$ är spegelbilden av $y = e^x$ i linjen $y = x$.



Sats 6

Logaritmfunktionen $f(x) = \log_a x$ är strängt växande om $a > 1$. Vidare gäller att

$$\log_a x \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{då } x \rightarrow \infty \\ -\infty & \text{då } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

Exempel 14

Lös ekvationen $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$.

Lösning:

$$\ln \sqrt{x} = \ln x^{1/2} = \frac{\ln x}{2}$$

Substitutionen $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$ ger

$$\sqrt{t} = \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t}(\sqrt{t} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ eller } t = 4$$

$$\Leftrightarrow x = e^0 = 1 \text{ eller } x = e^4$$

Exempel 15

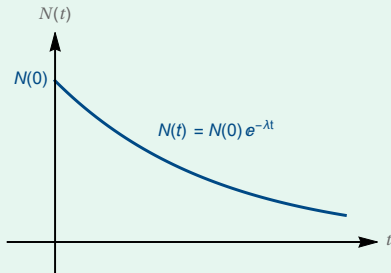
Radioaktivt sönderfall beskrivs av

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

där $N(t)$ är antalet radioaktiva kärnor vid tiden t och λ sönderfallskonstanten. Bestäm halveringstiden, dvs den tid T vid vilken hälften av de ursprungliga radioaktiva kärnorna sönderfallit.

Lösning:

$$\begin{aligned} N(T) &= \frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-\lambda T} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= e^{-\lambda T} \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -\ln 2 = -\lambda T \\ \Leftrightarrow T &= \frac{\ln 2}{\lambda} \end{aligned}$$



Exempel 16 (Tenta 101028, uppgift 1a, 2p)

Lös ekvationen $27^x + 2 \cdot 3^x = 3 \cdot 9^x$

Exempel 17

Lös ekvationen $\ln(x - 4) + \ln(x - 3) = \ln 2$