MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om trigonometriska funktioner

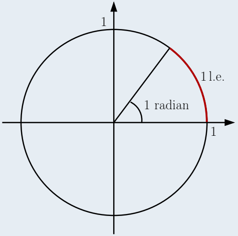
Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

9 oktober 2024

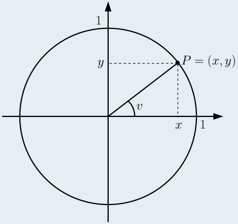
Enhetscirkeln

Definition 1 (Vinkelmåttet radianer)



- Den vinkel som motsvarar en båge med längden 1 l.e. i enhetscirkeln är 1 radian.
- Normalt anges ingen enhet om vinkeln anges i radianer.
- Vridning moturs motsvarar positiv vinkel.
- 1 varv i e.c. $\Leftrightarrow$ vinkeln 2π radianer.

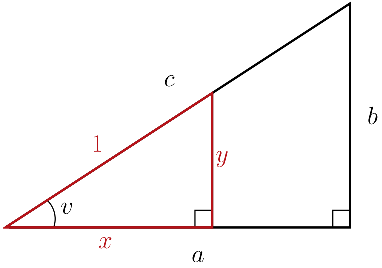
Definition 2 (Trigonometriska funktioner)



I enhetscirkeln:

- $\sin v = y$
- $\cos v = x$
- $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}, \quad v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
- $\cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v}, \quad v \neq n\pi$

Rätvinkliga trianglar



De båda trianglarna är likformiga:

- $\frac{b}{c} = \frac{y}{1} = \sin v$
- $\frac{a}{c} = \frac{x}{1} = \cos v$
- $\frac{b}{a} = \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan v$

Trigonometriska samband i rätvinkliga trianglar

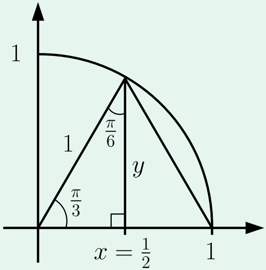
- $\sin v = \dfrac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}$
- $\cos v = \dfrac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$
- $\tan v = \dfrac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$

Viktiga vinklar

Exempel 1

Bestäm $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ då $v = \frac{\pi}{3}$ respektive $v = \frac{\pi}{6}$.

Lösning:



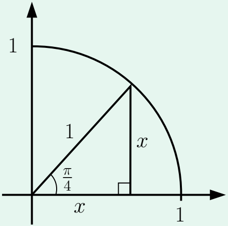
- $\sin \frac{\pi}{3} = y = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \frac{\pi}{3} = x = \frac{1}{2}$
- $\sin \frac{\pi}{6} = x = \frac{1}{2}$
- $\cos \frac{\pi}{6} = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$
- $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Viktiga vinklar

Exempel 2

Bestäm $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ då $v = \frac{\pi}{4}$.

Lösning:



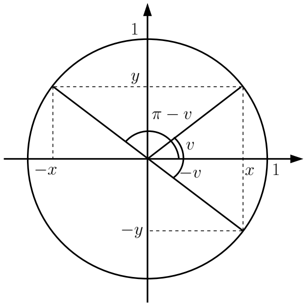
Pythagoras sats:
$$x^2 + x^2 = 1^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

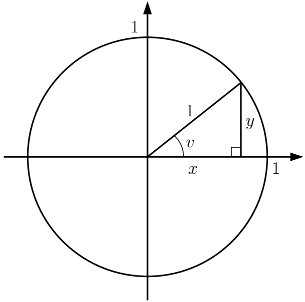
- $\sin \frac{\pi}{4} = x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\cos \frac{\pi}{4} = x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1$

Viktiga vinklar!

v		$\sin v$	$\cos v$
0°	0	0	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0

Symmetriegenskaper och samband





Symmetriegenskaper

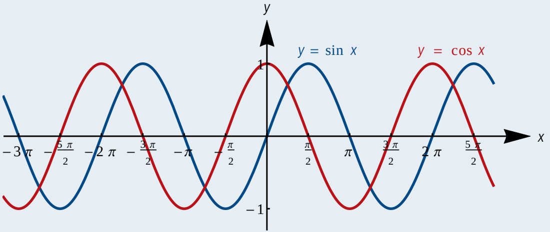
- $\sin(\pi - v) = \sin v$
- $\cos(\pi - v) = -\cos v$
- $\sin(-v) = -\sin v$ (udda funktion)
- $\cos(-v) = \cos v$ (jämn funktion)
- $\sin(\frac{\pi}{2} \pm v) = \cos v$
- $\cos(\frac{\pi}{2} \pm v) = \mp \sin v$

Pythagoras sats $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1^2 \Leftrightarrow$

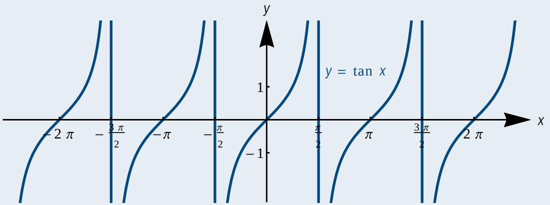
”Trigonometriska ettan”

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

De periodiska funktionerna $\sin x$, $\cos x$ och $\tan x$



- $\cos x = \cos(x + n \cdot 2\pi)$
  Period $T = 2\pi$
- $\sin x = \sin(x + n \cdot 2\pi)$
  Period $T = 2\pi$



- $\tan x = \tan(x + n \cdot \pi)$
  Period $T = \pi$

Anm: $y = \tan x$ har lodräta asymptoter $x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$

Additions och subtraktionssatserna

Sats 1

För alla vinklar u och v gäller:

1. $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$
2. $\sin(u-v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u$
3. $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$
4. $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

Exempel 3

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \underset{(1.4)}{=} \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$u = v$ i (1) och (3) ger:

Sats 2 (Formler för dubbla vinkeln)

1. $\sin 2v = 2\sin v\cos v$
2. $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = 2\cos^2 v - 1 = 1 - 2\sin^2 v$

Trigonometriska ekvationer

Exempel 4

Lös ekvationen $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lösning:

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

Exempel 5

Lös ekvationen $\cos 2x = 1 - \sin x$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\cos 2x &\underset{(2.2)}{=} 1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x = \sin x \\
&\Leftrightarrow \sin x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = n \cdot \pi \\ \text{eller} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Trigonometriska ekvationer

Exempel 6

Lös ekvationen $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lösning:

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

Exempel 7

Lös ekvationen $2\sin^2 x - \cos x = 1$

Lösning:

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ och $t = \cos x$ ger

$$2(1-t^2) - t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ eller } t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + n \cdot 2\pi \\ \text{eller} \\ t = \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

Trigonometriska ekvationer

Exempel 8

Lös ekvationen $\cos 5x = \cos 3x$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\cos 5x = \cos 3x \quad &\Leftrightarrow \quad 5x = \pm 3x + n \cdot 2\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = n \cdot \pi \\ \text{eller} \\ 8x = n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = n\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = n\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Exempel 9

Lös ekvationen $\sin x = \cos 3x$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 3x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = \pm 3x + n \cdot 2\pi \\
\Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{4} \text{ eller } x = -\frac{\pi}{4} + n\pi
\end{aligned}$$

Hjälpvinkelmetoden

Exempel 10

Lös ekvationen $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

Allmänt: Vi vill lösa ekvationer av typen $a\sin kx + b\cos kx = c$

- Kan vi använda additionssatsen för $\sin x$ (Sats 1.1):

$$\sin(kx+\varphi) = \cos\varphi\sin kx + \sin\varphi\cos kx \quad ?$$

- Fungerar endast om punkten (a, b) ligger på e.c. dvs om $a = \cos\varphi$ och $b = \sin\varphi \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$. Vad gör vi om det inte gäller?
- Bryt ut $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\begin{aligned} a\sin kx + b\cos kx &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin kx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos kx\right) \\ &= A(a_1\sin kx + b_1\cos kx) \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = 1 \Rightarrow$ vi kan hitta en hjälpvinkel φ sådan att

$$\cos\varphi = a_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\varphi = b_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Hjälpvinkelmetoden

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Sammanfattning:

Varje funktion av typen $f(x) = a\sin kx + b\cos kx$ kan skrivas på formen $f(x) = A\sin(kx+\varphi)$ där amplituden $A = \sqrt{a^2+b^2}$

Exempel 10 (forts)

$$\begin{aligned}
\sin x + \sqrt{3}\cos x &= \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}}\cos x\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) \\
&\Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{ vi kan välja } \varphi = \frac{\pi}{3} \\
\Rightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x &= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \text{ eller } x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \text{ eller } x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi
\end{aligned}$$

Hjälpvinkelmetoden

Exempel 11

Lös ekvationen $\sin 2x - \cos 2x = 1$

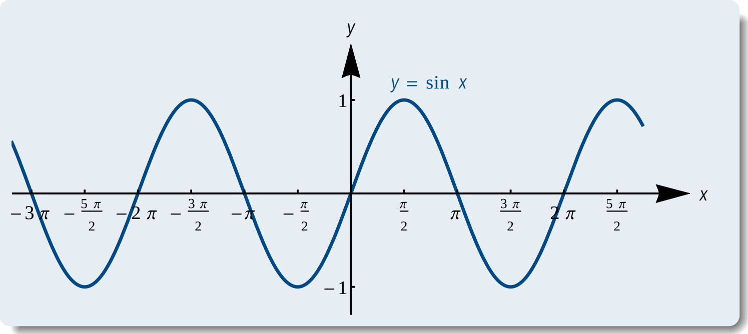
Lösning:

Hjälpvinkelmetoden med $A = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\sin 2x - \cos 2x &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{-1}{\sqrt{2}}\cos 2x\right) \\
&= \sqrt{2}(\cos\varphi \sin 2x + \sin\varphi \cos 2x) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ vi kan välja } \varphi = -\frac{\pi}{4} \\
\Rightarrow \sin 2x - \cos 2x &= \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi \text{ eller } 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + n\cdot 2\pi \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi \text{ eller } x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi
\end{aligned}$$

Inversa trigonometriska funktioner

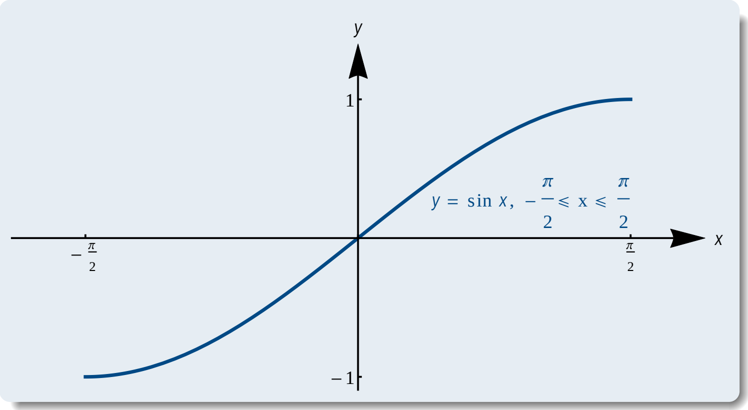
Studera funktionen $f(x) = \sin x$:



- $f(x)$ är periodisk $\Rightarrow f(x) = f(x+2\pi) = f(x+4\pi) = \ldots$
  $\therefore x_1 \neq x_2 \not\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
  $\Rightarrow f(x)$ är inte inverterbar.
- Motsvarande gäller för $\cos x$, $\tan x$ och $\cot x$.

Inversa trigonometriska funktioner

Studera istället funktionen $f(x) = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:



- $f(x)$ är strängt växande $\Rightarrow$ $f(x)$ är inverterbar och har en invers.
- Det finns intervall där även $\cos x$, $\tan x$ och $\cot x$ är strängt monotona och har invers.

Inversa trigonometriska funktioner

Definition 3

Inverserna till de trigonometriska funktionerna kallas arcusfunktioner och definieras genom:

$$
\begin{aligned}
y &= \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, && \Leftrightarrow x = \arcsin y \\
y &= \cos x,\ 0 \le x \le \pi, && \Leftrightarrow x = \arccos y \\
y &= \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, && \Leftrightarrow x = \arctan y \\
y &= \cot x,\ 0 < x < \pi, && \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} y
\end{aligned}
$$

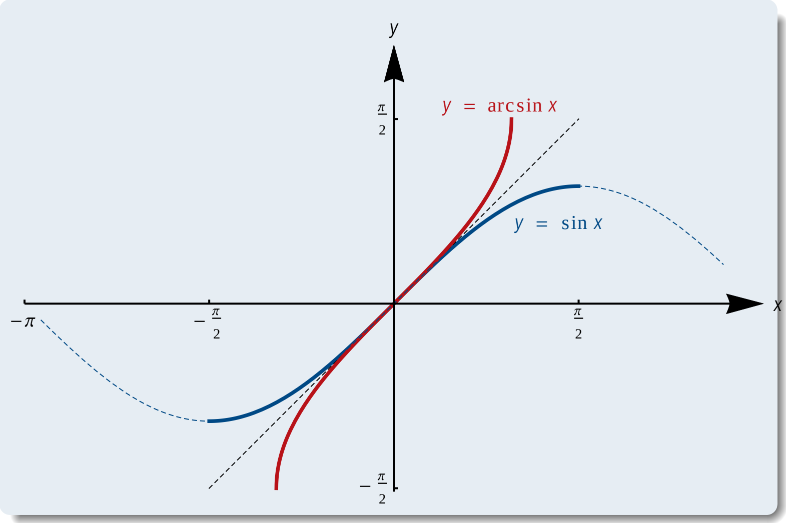
$f(x)$	D_f	V_f
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

Minnesregel:

$\arcsin y =$ "Den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ vars sinusvärde är y"

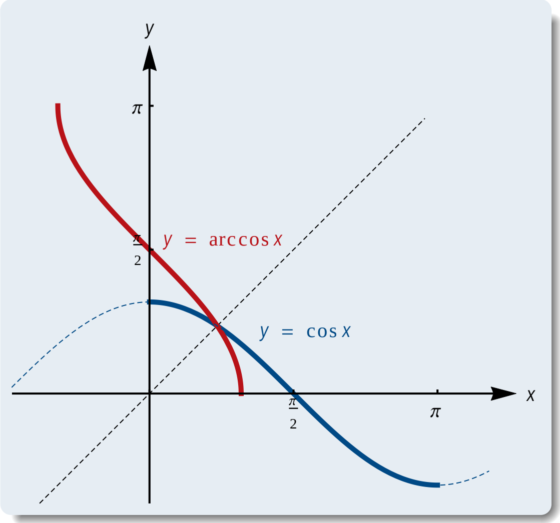
Inversa trigonometriska funktioner

$y = \arcsin x$



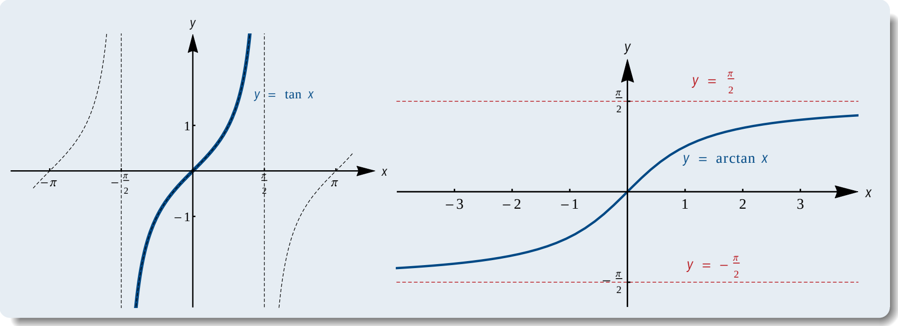
Inversa trigonometriska funktioner

$y = \arccos x$



Inversa trigonometriska funktioner

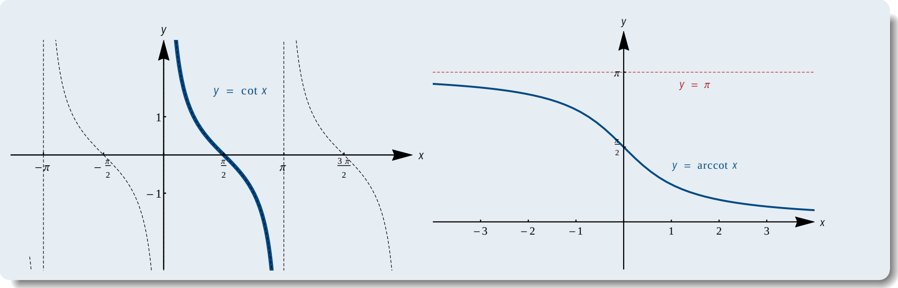
$y = \arctan x$



- $\arctan x \to \pm\frac{\pi}{2}$ då $x \to \pm\infty$
- $\Rightarrow$ kurvan $y = \arctan x$ har de vågräta asymptoterna $x = \pm\frac{\pi}{2}$ då $x \to \pm\infty$

Inversa trigonometriska funktioner

$y = \operatorname{arccot} x$



- $\operatorname{arccot} x \to 0$ resp π då $x \to \infty$ resp $-\infty$
- $\Rightarrow$ kurvan $y = \operatorname{arccot} x$ har de vågräta asymptoterna $y = 0$ då $x \to \infty$ och $y = \pi$ då $x \to -\infty$

Inversa trigonometriska funktioner

Exempel 12

$\arcsin \frac{1}{2} = \{$Den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ som ger sinusvärdet $\frac{1}{2}\} = \frac{\pi}{6}$

$\arccos \frac{-\sqrt{3}}{2} = \{$Den vinkel mellan 0 och π som ger cosinusvärdet $-\frac{\sqrt{3}}{2}\} = \frac{5\pi}{6}$

Anm:

- $\sin(\arcsin \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
- $\arcsin(\sin \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$!

Allmänt:

- $\sin(\arcsin x) = x$ för alla $x \in [-1, 1]$
- $\arcsin(\sin x) = x$ endast om $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$!

Motsvarande gäller för övriga arcusfunktioner.

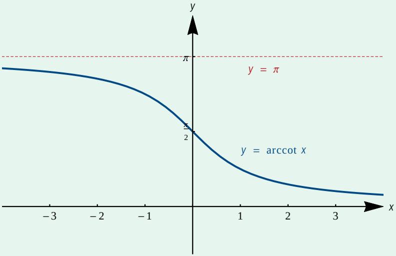
Inversa trigonometriska funktioner

Exempel 13

Lös ekvationerna $\arctan x = \frac{\pi}{4}$ och $\operatorname{arccot} x = -\frac{\pi}{4}$

Lösning:

- $\arctan x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \tan\frac{\pi}{4} = 1$
- $\operatorname{arccot} x = -\frac{\pi}{4}$ saknar lösning eftersom $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$!

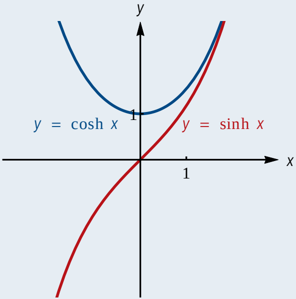


Hyperboliska funktioner

Definition 4

Cosinus-, sinus-, tangens- och cotangens-hyperbolikus definieras enligt:

- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
- $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$



De hyperboliska funktioner har vissa egenskaper som liknar de trigonometriska, t.ex. ”hyperboliska ettan”:

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})) = 1
\end{aligned}$$