

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Bestäm samtliga reella rötter till ekvationen:

(a) $(2x - 3)^4 + 3(2x - 3)^2 = 4(2x - 3)^3$

(b) $x^4 - 8x^2 = 9$

(c) $x(1 + x) = 2x - x\sqrt{1 + x}$

(d) $3\sqrt{x - 1} - \sqrt{5x - 1} = 2$

Korrekt användning av tecknen \Leftarrow , \Rightarrow eller \Leftrightarrow i varje lösningssteg krävs.

2. Lös olikheten:

(a) $(4 - x^2)^2 > (x^2 - 4x + 4)^2$

(b) $x^3 \leq 3x^2 + 4x$

(c) $\frac{x + 1}{x - 2} \geq \frac{x - 3}{x - 4}$

(d) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \leq \frac{x}{x - 4}$

Korrekt användning av tecknen \Leftarrow , \Rightarrow eller \Leftrightarrow i varje lösningssteg krävs.

3. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x :

$$A : e^{x-2} \leq 1, \quad B : \frac{x^3 - x^2 + x}{x + 1} \leq x, \quad C : x^2 \leq 1.$$

(b) Avgör vilka av utsagorna $A \Rightarrow C$, $A \Leftrightarrow C$, $(C \wedge B) \Rightarrow A$ och $C \Rightarrow (A \vee \neg B)$ som är sanna om

$$A : x > 3, \quad B : x > -2, \quad C : x^2 > 9.$$

(c) Avgör om något eller några av tecknen \Leftarrow , \Rightarrow eller \Leftrightarrow kan sättas mellan utsagorna A och B :

(1) $A : x < 8$

$B : x < 12$

(2) $A : t^2 < 9$

$B : t < 3$

(3) $A : 4x + 3 < 3x - 8$

$B : x < -11$

(4) $A : m + n$ är jämnt

$B : m$ och n är udda

(5) $A : x + 3 = 8$

$B : x - 4 = 1$

(6) $A : \sqrt{10 - x^2} = 3x$

$B : x = 1$

(7) $A : \sqrt{10 - x^2} = 3x$

$B : x^2 = 1$

(8) $A : x = 2$

$B : x^2 - 4 = 0$

(9) $A : \sin x = 1$

$B : x = \pi/2$

(10) $A : x^2 + 3x = 0$

$B : x + 8 = 0$

(d) Gör sanningsvärdestabell för de sammansatta utsagorna

(1) $\neg(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg A$

(2) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

(3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$

(4) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

(5) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

(6) $(A \wedge B) \Rightarrow A$

(7) $(\neg B \Leftrightarrow (A \vee B)) \wedge B$

(8) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Är någon av de sammansatta utsagorna en tautologi eller kontradiktion?

Vänd!

4. (a) Ange elementen i följande delmängder av \mathbb{N} :

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| (1) $\{x; x > 7 \wedge x > 12\}$ | (2) $\{x; x > 12 \wedge x < 7\}$ |
| (3) $\{x; x^2 > 8 \wedge x > 8\}$ | (4) $\{x; x^2 > 8 \vee x > 8\}$ |
| (5) $\{x; x < 10 \vee x > 12\}$ | (6) $\{x; x < 7 \vee x > 5\}$ |

(b) Mängden $A = \{0, \{1\}, \emptyset, \{2, 3\}\}$. Avgör vilka av följande utsagor som är sanna:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| (1) $\emptyset \subset A$ | (2) $\emptyset \in A$ |
| (3) $1 \subseteq A$ | (4) $\{1\} \in A$ |
| (5) $\{1\} \subseteq A$ | (6) $\{\{1\}\} \subseteq A$ |
| (7) $\{1, 2, 3\} \subseteq A$ | (8) $\{0, 1\} \in A$ |

(c) Mängderna $A = \{x \in \mathbb{R}; 1 < x < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; 2 < x < 6\}$ och $C = \{x \in \mathbb{R}; 3 \leq x \leq 5\}$. Ange mängderna $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A \cap B) \cup C$ och $(A \cup B) \setminus (A \setminus (A \cap B))$.

(d) En kväll gavs två föreställningar av studentspexet "Ökenmatte" på en liten högskola i södra Sverige. Av högskolans totalt 600 nollor såg 90 den första föreställningen, 120 den andra medan 425 nollor missade båda föreställningarna. Illustrera detta med venndiagram där alla nollor är grundmängd. Hur många av de 600 nollorna såg båda föreställningarna?