HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren

Algebra och diskret matematik
Uppgiftspaket 2
8 september 2024

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Visa att för alla positiva heltal n gäller följande likheter:
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1+3^2+5^2+7^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = 1+3+3^2+3^3+\cdots+3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

2. Lös differensekvationen
   (a) $y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n = 4\cdot 3^n,\ y_0=3,\ y_1=1,\ n\geq 0.$
   (b) $y_{n+2}-5y_{n+1}+6y_n = 4\cdot 2^n,\ y_0=1,\ y_1=1,\ n\geq 0.$
   (c) $y_{n+2}-6y_{n+1}+9y_n = 2\cdot 3^{n+2},\ y_0=-1,\ y_1=3,\ n\geq 0.$
   (d) $y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n = 4\cdot 3^n+2n+3,\ y_0=1,\ y_1=1,\ n\geq 0.$

3. (a) Visa att 3^n-1 är delbart med 2 för alla heltal $n\geq 1$.
   (b) Första dagen på ett nytt år öppnar Pelle ett bankkonto och sätter in 1000 kr. Därefter sätter han in 200 kr på kontot i början på varje månad. Årsräntan är 6% och beräknas varje månad. Hur mycket pengar har Pelle på kontot exakt 4 år efter att han öppnade kontot? Ställ upp en för problemet lämplig differensekvation och lös denna.
   (c) Myran Morgan är ute och kryper igen. Den här gången kryper han på x-axeln i positiv riktning. Sträckan Morgan kryper under den $(n+1)$:te sekunden är dubbelt så stor som sträckan han kryper under den n:te sekunden (n är förstås ett heltal). Morgan startar i punkten 1 och befinner sig i punkten 5 efter 1 s. Låt nu x_n ($n\geq 0$) beteckna Morgans position på x-axeln då han krupit i n sekunder. Ställ upp och lös en rekurrensekvation för x_n. Var är Morgan efter 10 s ?
   (d) På en studentfest hälsar alla på varandra en gång. Låt y_n beteckna totala antalet hälsningar om antalet festdeltagare är n. Ställ upp en rekurrensekvation för y_n och lös denna för att bestämma en sluten formel för y_n.

4. (a) Antag att x_n är antalet sätt att parkera motorcyklar och lastbilar på en enradig parkeringsplats med n platser. Varje motorcykel behöver en plats, varje lastbil två platser och parkeringsplatsen är full. Ställ upp en rekurrensekvation för x_n och lös denna. Kontrollera ditt svar genom att beräkna x_6 rekursivt samt med hjälp av lösningen till rekurrensekvationen.
   (b) Fibonaccis talföljd kan definieras genom $f_1=f_2=1,\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2},\ n\geq 3$. Bestäm en sluten formel för f_n. Visa sedan att f_n är det heltal som ligger närmast talet
   $$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
   (c) Spelingenjörerna Sara och Kalle kopplar av med lite sällskapsspel. De kastar var sitt mynt. Om båda mynten blir klave eller båda blir krona vinner Sara Kalles mynt. Om resultatet blir en av varje vinner Kalle Saras mynt. Sara och Kalle har från början S respektive K mynt.
   Låt P_n beteckna sannolikheten för att Sara vinner alla Kalles mynt om hon vid tillfället har n mynt kvar. Bestäm först P_0 och P_{S+K}, sätt därefter upp och lös en rekurrensekvation för P_n och bestäm till sist sannolikheten för att Sara vinner alla Kalles pengar om hon från början har hälften så många mynt som honom.
   (d) Låt a_n beteckna antalet n-siffriga tal som endast innehåller siffrorna 1, 2, 3 eller 4 och som har ett jämnt antal 1:or. Sätt upp en rekurrensekvation för a_n och bestäm därefter en sluten formel för a_n genom att lösa denna. Kontrollera ditt svar genom att beräkna a_3 rekursivt samt med hjälp av lösningen till rekurrensekvationen.