

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. (a) i. Utred sanningsvärdet för följande påståenden för heltal  $a$ :

$$2|a \Rightarrow 2|a^2, \quad 2|a^2 \Rightarrow 2|a, \quad 2|a \Leftrightarrow 2|a^2.$$

ii. Bestäm samtliga primtal  $p$  och  $q$  sådana att  $p^2 - q^2$  också är ett primtal.

(b) Visa att  $4|(a-1) \Rightarrow 4|(a^2+3)$  där  $a \in \mathbb{Z}$ .

(c) Bestäm

i. SGD(1369,2597), ii. SGD(231,1820)

(d) Vilket är det minsta naturliga tal som vid division med 83 ger resten 1 och vid division med 47 ger resten 3?

2. (a) i. Bestäm en multiplikativ invers till 9 modulo 17.

ii. Har  $[4]_{99}$  eller  $[6]_{99}$  multiplikativ invers?

iii. Vilka element i  $\mathbb{Z}_6$  har multiplikativ invers?

(b) Bestäm om möjligt ett tal  $d$  sådant att  $31d \equiv 1 \pmod{\phi(115)}$ .

(c) Finns det ett ISBN10 som har formen:  $a_1315266782$  ?

(d) Bestäm ett heltal  $x$  för vilket  $x^2 + x + 1 \equiv 2 \pmod{11}$ .

3. (a) Bestäm de värden på heltalet  $n > 1$  för vilka följande påståenden är korrekta:

i.  $28 \equiv 6 \pmod{n}$

ii.  $68 \equiv 37 \pmod{n}$

iii.  $301 \equiv 233 \pmod{n}$

iv.  $49 \equiv 2 \pmod{n}$

(b) Vilken rest erhålles då  $411 \cdot 821 + 376 \cdot 297$  divideras med 7?

(c) Visa att om  $n \in \mathbb{N}$  så är talet

i.  $3^{2n+1} + 5^{2n}$  delbart med 4 men inte med 8.

ii.  $7^{2n+1} + 17^n$  delbart med 8.

(d) Visa att  $(2n+1)3^n - 1$  är delbart med 4 för alla heltal  $n \geq 0$

4. (a) Bestäm de värden på heltalet  $c$ ,  $10 < c < 20$ , för vilka ekvationen  $84x + 990y = c$  saknar heltalslösning. Bestäm den allmänna heltalslösningen till ekvationen i de övriga fallen.

(b) Myran Morgan kryper omkring i ett koordinatsystem. Han startar i origo och kryper antingen i den positiva  $x$ -axelns eller i den positiva  $y$ -axelns riktning, alltid en längdenhet i taget. Det tar Morgan 2 s att krypa en längdenhet i  $x$ -axelns riktning och 7 s att krypa en längdenhet i  $y$ -axelns riktning. Vilka punkter kan Morgan nå om han kryper omkring i en minut?

(c) Ingenjörstudenten Pelle är godissugen och smyger in i kiosken. Där kostar en kola 50 öre, en liten dajm 4 kr och en snickers 9 kr. Pelle köper ett antal av varje sort, totalt 34 st för sammanlagt 97 kr. Hur många av varje sort köper han?

(d) Pelle ska skicka ett krypterat meddelande till Sara med hjälp av krypteringssystemet RSA. Saras publika nycklar är  $n$  och  $e = 23$ , där  $n$  bestäms av de två (hemliga) primtalen  $p = 5$  och  $q = 11$ . Pelle krypterar sitt meddelande med dessa nycklar och skickar det till Sara som tar emot meddelandet "3".

Motivera först varför  $e$  fungerar som publik nyckel för de valda primtalen och avkryptera sedan Pelles meddelande.