HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren

Algebra och diskret matematik
Uppgiftspaket 6
9 oktober 2024

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Bestäm de reella x för vilka

   (a) $\ln x + \ln 2 = \ln(3x-1) - 1$ (b) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

   (c) $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 5 = 0$ (d) $\ln(1+x) + \ln(1-x) = \ln 2x$

2. (a) Lös ekvationen
$$2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2 = 0$$

   (b) Lös ekvationen
$$3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$$

   (c) Bestäm det största och minsta värdet som $f(x) = 5\sin x + 12\sin(x + \pi/3)$ kan anta.

   (d) Lös olikheten $\ln(x^3 - x^2) \leq \ln(x-1) + \ln 4$.

3. (a) I akustiken anges ljudnivån L i decibel (dB) hos en ljudvåg med intensiteten I (W/m^2) som $L = 10\lg(I/I_0)$ där I_0 är bestämd referensintensitet. Med hur många dB ökar ljudnivån då intensiteten fördubblas?

   (b) i. Bestäm $\arcsin x$ om $\arccos x = \frac{\pi}{3}$.
   ii. Lös ekvationen $\arctan x + \arctan(x^2 - 1) = \frac{3\pi}{4}$.

   (c) Lös ekvationen
$$\log_x\left(\frac{x^3}{2}\right) + 2\log_{2x}\left(\frac{x^3}{2}\right) = 4.$$

   (d) I sjöar med plan botten fortplantas vågor (som inte är allt för höga) med en fart v som approximativt ges av:
$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}$$
   där d är djupet i m, g tyngdaccelerationen (m/s^2) och λ våglängden i m. I en planbottnad sjö i norrlands inland uppmätte vågingenjören Sara en våg med våglängden 9.0 m som fortplantade sig med farten 3.5 m/s. Hur djup var sjön?

4. (a) Då den vårdslöse kärnvapeningenjören Pelle Smäll testade kärnvapen 1961 frigjordes relativt stora mängder av den radioaktiva isotopen Strontium-90 i atmosfären och del av denna absorberades i Pelles skelett. Radioaktivt sönderfall kan beskrivas med en exponentiellt avtagande funktion och halveringstiden för Strontium-90 är 29 år. Hur många år tar det innan det återstår 10% av den ursprungligt absorberade dosen Strontium-90 i Pelles skelett?

   (b) Visa att den ena av summorna
$$\sum_{k=1}^{200} 3^{-k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad \text{och} \quad \sum_{k=0}^{100} 3^{-k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$
   approximativt men med mycket hög noggrannhet är 3 gånger så stor som den andra.

   (c) Sambandet mellan lufttrycket p (i mbar) och vattnets kokpunkt K (i °C) ges i intervallet $100 < p < 3000$ med god noggrannhet av
$$K(p) = (\frac{3}{2}\ln p - 1)^2 + 12.$$
   Sambandet mellan lufttrycket och höjden h över havet (i km) ges av $h(p) = 11\ln\left(\frac{1013}{p}\right)$. På vilken höjd över havet kokar vatten vid 85 °C?

Vänd!

(d) Koffeiningenjören Kajsa har efter omfattande praktiska studier kommit fram till att följande formel med hyfsad noggrannhet beskriver hur en kopp varmt kaffe avkyls i rumstemperatur:

$$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot 2^{-t/\tau} \quad [^\circ\mathrm{C}]$$

där T är kaffets temperatur vid tiden t (i min), T_0 rumstemperaturen, T_1 kaffets begynnelsetemperatur och τ en konstant som beror på koppens värmeisolerande förmåga.

i. Skissera sambandet grafiskt.

ii. Visa att τ är den tid det tar för differensen mellan kaffets och rummets temperatur att halveras.

iii. Kajsa har precis hällt upp en kopp färskbryggt kaffe men har pga en oförutsedd händelse inte möjlighet att dricka kaffet förrän efter t_0 min. Kajsa vill ha sitt kaffe blandat med p % kylskåpskall mjölk med temperaturen $T_2 < T_0$. Hon är förstås intresserad av att kaffet är så varmt som möjligt när hon dricker det. När är det då bäst att tillsätta mjölken - direkt efter upphällningen eller precis innan hon dricker kaffet?
Ange hur stor skillnaden mellan sluttemperaturerna blir för de två varianterna. Du kan anta att τ har samma värde för rent kaffe som för kaffe förorenat med mjölk.