HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren

Algebra och diskret matematik
Uppgiftspaket 7
16 oktober 2024

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Lös ekvationen

   (a) $z^2 + 4\bar{z} + 2z + 9 = 0$.

   (b) $z^4 + 5z^3 + 3z^2 + 11z + 60 = 0$ Tips: En rot är $1 - 2i$.

   (c) $z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 4z^2 - 8z + 4 = 0$ Tips: En rot är $1 + i$ och en rot är lätt att hitta.

   (d) $z^4 - z^3 - z + 1 = 0$.

2. (a) Skriv det komplexa talet z på polär form och för (3) och (4) även på rektangulär form då

   $$(1)\ z = \frac{(1-i)^3(\sqrt{3}+i)}{4i} \qquad (2)\ z = \frac{i}{1 + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{1+i}}$$

   $$(3)\ z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \qquad (4)\ z = \left(\frac{(1+i)^3}{\sqrt{2}(1-i\sqrt{3})}\right)^{-999}$$

   (b) Lös ekvationen $(1-i)z^2 - 2iz - 4 = 0$.

   (c) Lös ekvationen $z^2 = \frac{1+i}{1-i}$. Rötterna skall här anges på både rektangulär och polär form.

   (d) Lös ekvationerna $z^4 \pm 16 = 0$. Ange rötterna på både polär och rektangulär form samt rita in deras läge i det komplexa talplanet.

3. (a) Bestäm det reella talet k så att $\operatorname{Re}\left(\dfrac{4-3i}{k+i}\right) = 0$.

   (b) z är ett komplext tal sådant att $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = a$. För vilka a gäller $|z - i| = |z - 3|$?

   (c) Sträckan mellan punkterna $z = 1 + i$ och $w = 3 + 2i$ i det komplexa talplanet vrids kring punkten z motsols vinkeln $\frac{\pi}{2}$. Sträckans andra ändpunkt flyttas vid vridningen till ett nytt läge. Ange detta läge som ett komplext tal.

   (d) Bestäm den punktmängd i det komplexa talplanet som utgörs av de tal z för vilka

   (1) $|z+1| + |z-1| = 3$ (2) $\operatorname{Re}\dfrac{z+1}{z-1} = 0$

   Rita figur i båda fallen.

4. (a) Bestäm de värden på talen a, b och c för vilka ekvationen $z^3 - 3az^2 + b^2z + c = 0$ har rötterna $a + b$, $a - b$, och c.

   (b) $p(z)$ är ett polynom som ger resten 7 vid division med $z - 4$ och resten 5 vid division med $z - 3$. Vilken rest ger $p(z)$ vid division med $(z-3)(z-4)$?

   (c) För vilka komplexa tal w gäller att rötterna till ekvationen $z^2 - 4z + w = 0$ är varandras spegelbilder i linjen genom punkterna $2i$ och $3 - i$?

   (d) Följande stycke är hämtat från den berömde kapten Bloods memoarer:

   > *Gå från Galgen till Eken. Fortsätt en lika lång sträcka vinkelrätt åt vänster. Stick ned en Knif i marken. Gå tillbaka till galgen. Gå från Galgen till Tallen. Fortsätt en lika lång sträcka vinkelrätt åt höger. Skatten är nedgräfvd mitt emellan dig och Knifven.*

   Den ökände sjörövaringenjören Pelle Pirat uppsöker platsen men finner att galgen försvunnit. Eftersom han läst en seriös kurs i algebra och diskret matematik är han expert på räkning med komplexa tal och kan efter några minuters tankemöda ändå utpeka skattens läge. Hur kan han det?