Högskolan i Halmstad
IDE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Lördagen den 17 januari 2015
Skrivtid: 9.00-13.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}dx$. *(3p)*

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{e^x + \ln(1-x) - 1}$. *(2p)*

2. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

4. (a) Härled derivatan av $\cos x$. *(1p)*

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy' - 2y - \frac{x^3}{1+x^2} = 0,$$

   för vilken $y(1) = \pi$. *(4p)*

5. (a) Härled formeln för partiell integration. *(1p)*

   (b) Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan

$$y = \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x^{3/2}},\ x \geq 1,$$

   roterar kring x-axeln. *(4p)*

6. (a) Härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner. *(1p)*

   (b) IT-ingenjören Sara har fått i uppgift att uppskatta hur antalet internetanvändare i världen ökar. År 2004 uppskattades andelen internetanvändare till 10% och år 2014 var andelen 50%. Sara har kommit fram till att följande modell beskriver denna ökning: Andelen som använder internet ökar med en hastighet som vid varje tidpunkt är proportionell mot produkten av andelen som använder internet och andelen som inte använder internet. När kommer andelen internetanvändare i världen passera 90% om vi förutsätter att Saras modell beskriver verkligheten korrekt? *(4p)*

Lycka till!

Högskolan i Halmstad
IDE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Lördagen den 17 januari 2015
Skrivtid: 9.00-13.00

Lösningsförslag

1. (a) Substitutionen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0$, ger $dx = 2tdt$ och vi får

$$\int_0^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}dx = \int_0^2 \frac{1}{(1+t)^2}2tdt = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{(1+t)^2}dt = 2\int_0^2 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$$
$$= 2\left[\ln|1+t| + \frac{1}{1+t}\right]_0^2 = 2\ln 3 - \frac{4}{3}.$$

(b) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($-x \to 0$ då $x \to 0$):

$$e^x + \ln(1-x) - 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) + (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) - 1$$
$$= -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t om ordning 3:

$$x\cos x - \sin x = x(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)) - (x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)) = -\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

Vi får till slut

$$\frac{x\cos x - \sin x}{e^x + \ln(1-x) - 1} = \frac{-\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)}{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)}{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x)} \to 2 \text{ då } x \to 0.$$

2. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' + 3y' + 2y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = e^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$ har nollställena $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom e^{-x} är en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör standardansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' + 3y' + 2y = (z'' - 2z' + z + 3(z' - z) + 2z)e^{-x} = (z'' + z')e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow z'' + z' = 1.$$

Vi ser direkt att $z = x$ är en lösning och vi får $y_p = xe^{-x}$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + xe^{-x}.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$y(0) = C_1 + C_2 + 0 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 - C_1$$
$$y'(x) = -C_1e^{-x} - 2C_2e^{-2x} + e^{-x} - xe^{-x} = (-C_1 + 1 - x)e^{-x} - 2(1 - C_1)e^{-2x}$$
$$\Rightarrow y'(0) = -C_1 + 1 - 2(1 - C_1) = C_1 - 1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 1.$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = e^{-2x} + xe^{-x}.$$

3. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2) - (x^2 - x - 1)1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = 3.$$

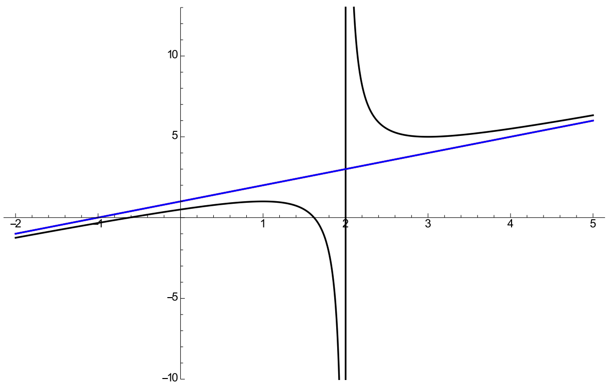
Sedan undersöker vi derivatans tecken och tar förutom de stationära punkterna även med punkten $x = 2$ där f och f' inte är definierade: Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan

x		1		2		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

$y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll för $x = 2$ medan täljaren är skild från noll för $x = 2$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 2$. Pga att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \underbrace{x + 1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{1}{x - 2}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal maximipunkt i $x = 1$ med värdet $f(1) = 1$ och en lokal minimipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = 5$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 2$ samt den sneda asymptoten $y = x + 1$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = \cos x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$
$$= -\sin x \frac{\sin h}{h} + \cos x \frac{\cos h - 1}{h}$$

där $\dfrac{\sin x}{h} \to 1$ och

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$$
$$= -\frac{\sin h}{h} \cdot \sin h \cdot \frac{1}{\cos h + 1} \to -1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{1+1} = 0 \text{ då } h \to 0$$

dvs $D \cos x = -\sin x$.

(b) Detta är en linjär differentialekvation:

$$xy' - 2y - \frac{x^3}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{2}{x}y = \frac{x^2}{1+x^2}\ .$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{x^2}$ ger:

$$y'\frac{1}{x^2} + y(-\frac{2}{x^3}) = D\left(y\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow y\frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$
$$\Leftrightarrow y(x) = x^2(\arctan x + C) \quad \leftarrow \text{ Allmän lösning}$$

där C är en godtycklig konstant. Villkoret $y(1) = \pi$ ger nu

$$y(1) = 1^2(\arctan 1 + C) = \frac{\pi}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \frac{3\pi}{4}$$

och den sökta lösningen är därför

$$y(x) = x^2\left(\arctan x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

5. (a) Om $F'(x) = f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar har vi:

$$D(Fg) = F'g + fg' = fg + fg' \Leftrightarrow fg = D(Fg) - Fg'$$
$$\Leftrightarrow \int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

(b) Volymen ges av den generaliserade integralen:

$$\pi\int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x^{3/2}}\right)^2 dx = \pi\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx$$

Partiell integration och partialbråksuppdelning ger:

$$\begin{aligned}
\int_1^R \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx &= \left[-\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)\right]_1^R + \int_1^R \frac{1}{2x^2}\frac{2x}{1+x^2}dx \\
&= \left[-\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)\right]_1^R + \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2) + \ln x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_1^R \\
&= -\frac{\ln(1+R^2)}{2R^2} + \ln\left(\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}\right) - \left(-\frac{\ln 2}{2} + \ln 1 - \frac{\ln 2}{2}\right) \to \ln 2 \text{ då } R \to \infty.
\end{aligned}$$

Den sökta volymen är alltså $\pi \ln 2$ v.e.

6. (a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är två deriverbara funktioner så söker vi derivatan av $f(x)g(x)$ och vi får differenskvoten

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\to f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ då } h \to 0
\end{aligned}$$

dvs $D(fg) = f'g + fg'$.

(b) Sätter vi $y(t)$ = andelen internetanvändare vid tiden t räknat från år 2004, innebär Saras modell att

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t)(1-y(t)) \\ y(0) = 1/10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y(1-y)}y' = k \\ y(0) = 1/10 \end{cases}$$

som är en separabel differentialekvation. Integrering av båda leden ger

$$\int \frac{1}{y(1-y)}dy = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right)dy = \ln|y| - \ln|1-y| = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = kt + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = e^{kt+C_1} = e^{kt}e^{C_1} = C_2e^{kt} \quad (C_2 = e^{C_1} > 0)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{e^{kt}}{e^{kt}+C_3} \quad \text{där } C_3 = \frac{1}{C_2}$$

Från begynnelsevillkoret får vi

$$y(0) = \frac{e^0}{e^0+C_3} = \frac{1}{1+C_3} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow C_3 = 9$$

Med hjälp av informationen att andelen efter 10 år är 50%, dvs $y(10) = 1/2$, kan proportionalitetskonstanten bestämmas:

$$y(10) = \frac{e^{10k}}{e^{10k}+9} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{5}$$

Vi har alltså

$$y(t) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{5}t}}{e^{\frac{\ln 3}{5}t}+9} = \frac{3^{t/5}}{3^{t/5}+9}$$

Det år när andelen internetanvändare når 90% ges nu av:

$$y(t) = \frac{3^{t/5}}{3^{t/5}+9} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow t = 20$$

dvs år 2024.