Högskolan i Halmstad
ITE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Tisdagen den 12 januari 2016
Skrivtid: 9.00-13.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}(1+x)-\cos x}{\sin x - \arctan x}$. *(2p)*

   (b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$. *(3p)*

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = \frac{2x^2-3x}{x-2}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

3. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 6xe^{-x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

4. (a) Härled derivatan av e^x. *(1p)*

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$(1+x^2)y' + y^2 = 0,$$

   för vilken $\lim_{x\to\infty} y(x) = \dfrac{1}{\pi}$. *(4p)*

5. (a) För vilka värden på talet α är den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$$

   konvergent? *(2p)*

   (b) Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan

$$y = \frac{\ln x}{x},\ x \geq 1,$$

   roterar kring x-axeln. *(3p)*

6. (a) Härled en lösningsformel för differentialekvationer av typen $y' + g(x)y = h(x)$. *(1p)*

   (b) Ett mord har begåtts i en liten stad i södra Sverige. När kriminalingenjören Pärlock Holm kommer till brottsplatsen kl 12.00 är kroppens temperaturen 29 °C. När Pärlock två timmar senare lämnar brottsplatsen har kroppens temperatur sjunkit till 25 °C. På brottsplatsen är temperaturen konstant 21 °C. En levande människas normaltemperatur är 37 °C och en död kropps temperatur följer Newtons avsvalningslag dvs temperaturen avtar med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan kroppens temperatur och omgivningens temperatur. När skedde mordet? *(4p)*

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren:

$$\begin{aligned}\sin x - \arctan x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... - \big(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ...\big)\\ &= \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).\end{aligned}$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t om ordning 3. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($-x \to 0$ då $x \to 0$):

$$\begin{aligned}e^{-x}(1+x) - \cos x &= \big(1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)\big)(1+x) - \big(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\big)\\ &= \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4).\end{aligned}$$

Vi får till slut

$$\frac{e^{-x}(1+x) - \cos x}{\sin x - \arctan x} = \frac{\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)}{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x)}{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)} \to 2 \text{ då } x \to 0.$$

(b) Substitutionen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0$, ger $dx = 2tdt$ och vi får

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx &= \int_0^2 \frac{t}{1+t}2tdt = 2\int_0^2 \frac{t^2}{1+t}dt \underset{\text{pol.div}}{=} 2\int_0^2 \left(-1 + t + \frac{1}{1+t}\right)dt\\ &= 2\left[-t + \frac{t^2}{2} + \ln|1+t|\right]_0^2 = 2\ln 3.\end{aligned}$$

2. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2x^2-3x}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x-3)(x-2) - (2x^2-3x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2} = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = 3.$$

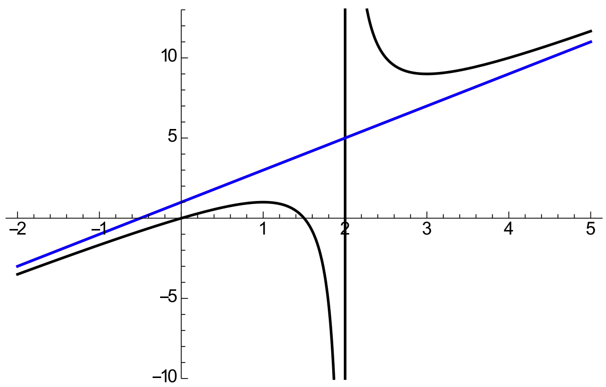
Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkten $x = 2$ där f och f' inte är definierade:

x		1		2		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = 2$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 2$. Pga att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{2x^2-3x}{x-2} = \underbrace{2x+1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{2}{x-2}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal maximipunkt i $x = 1$ med värdet $f(1) = 1$ och en lokal minimipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = 9$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 2$ samt den sneda asymptoten $y = 2x + 1$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2}$.

3. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' + 2y' + y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = 6xe^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ har nollställena $r_1 = r_2 = -1$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom $6xe^{-x}$ är ett polynom multiplicerat med en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör standardansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' + 2y' + y = (z'' - 2z' + z + 2(z' - z) + z)e^{-x} = z''e^{-x} = 6xe^{-x} \Leftrightarrow z'' = 6x.$$

Integrering 2 ggr ger direkt att $z = x^3$ är en lösning och vi får $y_p = x^3 e^{-x}$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2 + x^3)e^{-x}.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0 + C_2 + 0 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 \\
y'(x) &= (C_1 + 3x^2)e^{-x} + (C_1 x + C_2 + x^3)e^{-x}(-1) = (C_1 - C_2 - C_1 x + 3x^2 - x^3)e^{-x} \\
&\Rightarrow y'(0) = C_1 - C_2 - 0 + 0 - 0 = C_1 - C_2 = C_1 - 1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 0.
\end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (1 + x^3)e^{-x}.$$

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = e^x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} \to e^x \cdot 1 = e^x \text{ då } x \to 0$$

dvs $De^x = e^x$.

(b) Detta är en separabel differentialekvation:

$$(1+x^2)y' + y^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \int \big(-\frac{1}{y^2}\big)dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \arctan x + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\arctan x + C} \qquad \leftarrow \text{Allmän lösning}$$

Enligt gränsvärdesvillkoret i uppgiften har vi:

$$y(x) = \frac{1}{\arctan x + C} \to \frac{1}{\frac{\pi}{2}+C} = \frac{1}{\pi} \quad \text{då} \quad x \to \infty \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = \frac{1}{\arctan x + \frac{\pi}{2}}\,.$$

5. (a) Vi beräknar den generaliserade integralen för olika värden på α:

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \alpha = 1: \ [\ln x]_1^R = \ln R - \ln 1 = \ln R \to \infty \text{ då } R \to \infty \\ \alpha \neq 1: \ \Big[-\frac{1}{\alpha-1}x^{-(\alpha-1)}\Big]_1^R = -\frac{R^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \to \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha > 1. \\ \infty & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Resultatet visar att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är konvergent omm } \alpha > 1.$$

(b) Volymen ges av den generaliserade integralen:

$$\pi \int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx$$

Substitutionen $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$ ger $dx = e^t dt$ och med två partiella integrationer får vi:

$$\int_1^R \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx = \int_0^{\ln R} \frac{t^2}{e^{2t}}e^t dt \underset{\ln R = R_1}{=} \int_0^{R_1} t^2 e^{-t}dt = \big[-t^2e^{-t}\big]_1^{R_1} + \int_0^{R_1} 2te^{-t}dt$$

$$= \big[-t^2e^{-t} - 2te^{-t}\big]_0^{R_1} + \int_0^{R_1} 2e^{-t}dt = \big[-(t^2+2t+2)e^{-t}\big]_0^{R_1}$$

$$= \underbrace{-(R_1^2 + 2R_1 + 2)e^{-R_1}}_{\to 0 \text{ då } R_1 \to \infty} + 2 \to 2 \text{ då } R_1 \to \infty \text{ dvs då } R \to \infty.$$

Den sökta volymen är alltså 2π v.e.

6. (a) Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{G(x)}$ där $G'(x) = g(x)$ gör att vänsterledet kan skrivas som derivatan av en produkt:

$$y' + g(x)y = h(x) \Leftrightarrow y'e^{G(x)} + ye^{G(x)}g(x) = D(ye^{G(x)}) = h(x)e^{G(x)} \Leftrightarrow ye^{G(x)} = \int h(x)e^{G(x)}dx$$

$$\Leftrightarrow y(x) = e^{-G(x)} \int h(x)e^{G(x)}dx\,.$$

(b) Kroppens temperatur följer Newtons avsvalningslag dvs om $T(t)$ är dess temperatur vid tiden t har vi

$$T'(t) = -k(T(t) - T_{\mathrm{b}}) \Leftrightarrow T'(t) + kT(t) = kT_{\mathrm{b}}$$

där T_{b} är temperaturen på brottsplatsen och $k > 0$ en konstant. Detta är en linjär differentialekvation av 1:a ordningen som kan lösas på vanligt sätt genom multiplikation med den integrerande faktorn e^{kt}:

$$T'(t)e^{kt} + T(t)e^{kt}k = D(T(t)e^{kt}) = kT_{\mathrm{b}}e^{kt} \Leftrightarrow T(t)e^{kt} = \int kT_{\mathrm{b}}e^{kt}dt = T_{\mathrm{b}}e^{kt} + C$$

$$\Leftrightarrow T(t) = Ce^{-kt} + T_{\mathrm{b}}$$

där C är en konstant. Om begynnelsetemperaturen (dvs kroppens temperatur då Pärlock kommer till brottsplatsen) är T_0 har vi:

$$T(0) = Ce^0 + T_{\mathrm{b}} = T_0 \Leftrightarrow C = T_0 - T_{\mathrm{b}}$$

och vi får

$$T(t) = (T_0 - T_{\mathrm{b}})e^{-kt} + T_{\mathrm{b}}\,.$$

Eftersom kroppens temperatur sjunker från 29°C till 25°C på 2 timmar vid temperaturen $T_{\mathrm{b}} = 21$°C får vi

$$T(2) = (29 - 21)e^{-k\cdot 2} + 21 = 25 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{2}$$

dvs

$$T(t) = 8e^{-\frac{\ln 2}{2}t} + 21 = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}} + 21\,.$$

Vid tidpunkten för mordet, t_{m}, var kroppstemperaturen 37 °C vilket ger

$$T(t_{\mathrm{m}}) = 8 \cdot 2^{-\frac{t_{\mathrm{m}}}{2}} + 21 = 37 \Leftrightarrow t_{\mathrm{m}} = -2\,.$$

Mordet skedde alltså 2 timmar innan Pärlock anlände dvs kl 10.00.