Högskolan i Halmstad
ITE/MPE-lab
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Fredagen den 13 januari 2017
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna gränsvärdet (*2p*)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\ln(1-x)-1}{\arctan x-\sin x}.$$

   (b) Beräkna integralen (*3p*)

$$\int_0^1 \frac{4}{4-x^2}\,dx\,.$$

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y=f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)

$$\begin{cases} y''+2y'+y=e^{-x}, \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

4. (a) Härled formeln för partiell integration. (*1p*)

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy'=xe^x-y$$

   för vilken $\lim_{x\to 0} y(x)=0$. (*4p*)

5. (a) Beräkna den generaliserade integralen (*2p*)

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx\,.$$

   (b) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 6 till e^{-x^2}. Använd resultatet för att bestämma ett approximativt värde på integralen

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

   med ett fel som är mindre än $0.5\cdot 10^{-3}$. (*3p*)

6. (a) Formulera medelvärdessatsen och förklara innebörden av den med hjälp av en figur. (*1p*)

   (b) Fisken Pelle simmar motströms i Mississippifloden med konstant fart v relativt vattnet. Han är på väg mot fisken Kajsa som håller till en bit upp i floden. Strömningsfarten i området är $v_s < v$. Den energi Pelle förbrukar under simturen är proportionell mot både hans fart v i kubik och mot tiden det tar att simma till Kajsa. Han är förstås intresserad av att vara så pigg som möjligt när han kommer fram och vill därför minimera sin energiförbrukning. Bestäm den simfart v som ger lägst energiförbrukning. Skissera också kurvan som beskriver hur energiförbrukningen beror på v. (*4p*)

Lycka till!

Högskolan i Halmstad
ITE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Fredagen den 13 januari 2017
Skrivtid: 15.00-20.00

Lösningsförslag

1. (a) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren:

$$\arctan x - \sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\right) = -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t.o.m. ordning 3. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($-x \to 0$ då $x \to 0$):

$$\begin{aligned} e^x + \ln(1-x) - 1 &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) + (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) - 1 \\ &= -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4). \end{aligned}$$

Vi får till slut

$$\frac{e^x + \ln(1-x)x - 1}{\arctan x - \sin x} = \frac{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)}{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x)}{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)} \to 1 \text{ då } x \to 0.$$

(b) Faktorisering av nämnaren följt av partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4}{4-x^2}dx &= \int_0^1 \frac{4}{(2+x)(2-x)}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right)dx = \ln|2+x| - \ln|2-x| \\ &= \left[\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right]_0^1 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3. \end{aligned}$$

2. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) &= \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 3. \end{aligned}$$

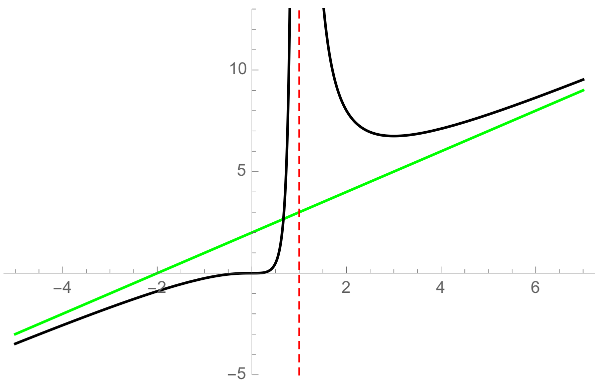
Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkten $x = 1$ där f och f' inte är definierade:

x		0		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$*$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = 1$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 1$. P.g.a. att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = \underbrace{x+2}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal terasspunkt i $x = 0$ med värdet $f(0) = 0$ och en lokal minimipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = \frac{27}{4}$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 1$ samt den sneda asymptoten $y = x + 2$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

3. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' + 2y' + y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = e^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ har nollställena $r_1 = r_2 = -1$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom Ae^{-x} redan finns i y_h fungerar inte den ansatsen och vi inför därför hjälpfunktionen z och gör ansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' + 2y' + y = (z'' - 2z' + z + 2(z' - z) + z)e^{-x} = z''e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow z'' = 1.$$

Integrering 2 ggr ger direkt att $z = \frac{x^2}{2}$ är en lösning och vi får $y_p = \frac{x^2}{2}e^{-x}$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2 + \frac{x^2}{2})e^{-x}.$$

Från begynnelsvillkoren får vi

$$\begin{aligned} & y(0) = 0 + C_2 + 0 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 \\ & y'(x) = (C_1 + x)e^{-x} + (C_1 x + C_2 + \frac{x^2}{2})e^{-x}(-1) = (C_1 - C_2 - C_1 x + x - \frac{x^2}{2})e^{-x} \\ & \quad \Rightarrow y'(0) = C_1 - C_2 - 0 + 0 - 0 = C_1 - C_2 = C_1 - 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 2. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (\frac{x^2}{2} + 2x + 1)e^{-x}.$$

4. (a) Om $F'(x) = f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar har vi:

$$\begin{aligned} D(Fg) = F'g + Fg' = fg + Fg' \Leftrightarrow fg = D(Fg) - Fg' \\ \Leftrightarrow \int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

(b) Eftersom detta är en linjär differentialekvation av första ordningen kan vi använda metoden med integrerande faktor men det är lite onödigt i det här fallet eftersom vänsterledet efter omskrivning redan är derivatan av en produkt:

$$xy' = xe^x - y \Leftrightarrow xy' + y = D(yx) = xe^x \Leftrightarrow yx = \int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$
$$\Leftrightarrow y(x) = e^x - \frac{e^x - C}{x}$$

Eftersom $e^x \to 1$ då $x \to 0$ måste

$$\frac{e^x - C}{x} \to 1 \text{ då } x \to 0 \Leftrightarrow C = 1 \quad \text{(standardgränsvärde)}$$

om villkoret $y(x) \to 0$ då $x \to 0$ ska vara uppfyllt. Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = e^x - \frac{e^x - 1}{x}.$$

5. (a) Vi har

$$\int_0^R \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \left[\begin{array}{c} t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 1,\ x = R \Leftrightarrow t = e^R = R_1 \end{array} \right] = \int_1^{R_1} \frac{t}{t^2+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^{R_1} \frac{1}{t^2+1} dt$$
$$= [\arctan t]_1^{R_1} = \arctan R_1 - \arctan 1 \to \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ då } R_1 \to \infty \text{ dvs då } R \to \infty.$$
$$\therefore \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Vi gör först en Maclaurinutveckling av $f(x) = e^x$ t.o.m. ordning 3:

$$e^x = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3}_{\text{Maclaurinpolynomet av ordning 3}} + \underbrace{\frac{f^{(4)}(\xi)x^4}{4!}}_{\text{resttermen}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^\xi x^4}{4!}$$

där ξ är ett tal mellan 0 och x d.v.s. $\xi = \theta x$ där $0 \le \theta \le 1$. Utnyttjar vi nu entydigheten i Maclaurinutvecklingen får vi direkt genom insättning utvecklingen av e^{-x^2} t.o.m. ordning 6:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{e^{-\theta x^2} x^8}{4!}.$$

Vi har alltså

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\right) dx}_{\text{approximationen}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-\theta x^2} x^8}{24} dx}_{\text{felet}}.$$

Den första integralen är enkel att beräkna och ger oss ett approximativt värde på den sökta integralen:

$$\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{26}{35} \approx 0.743.$$

Eftersom $0 < e^{-\theta x^2} \le 1$ kan vi göra en uppskattning av storleken på felet

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{-\theta x^2} x^8}{24} dx \right| \le \int_0^1 \frac{x^8}{24} dx = \left[\frac{x^9}{9 \cdot 24}\right]_0^1 = \frac{1}{216} < \frac{1}{200} = 5 \cdot 10^{-3}.$$

Vi har alltså

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.743 \pm 0.005.$$

6. (a) Se föreläsning *Derivator del 1*, s 8, eller Månsson & Nordbäck, *Endimensionell analys*, s. 230.

(b) Den tid det tar för Pelle att simma sträckan s till Kajsa är $t = s/(v - v_s)$. Pelles energiförbrukning ges därför av

$$E(v) = kv^3 t = K\frac{v^3}{v - v_s}, \quad v > v_s$$

där k och $K = ks$ är konstanter. Derivering ger

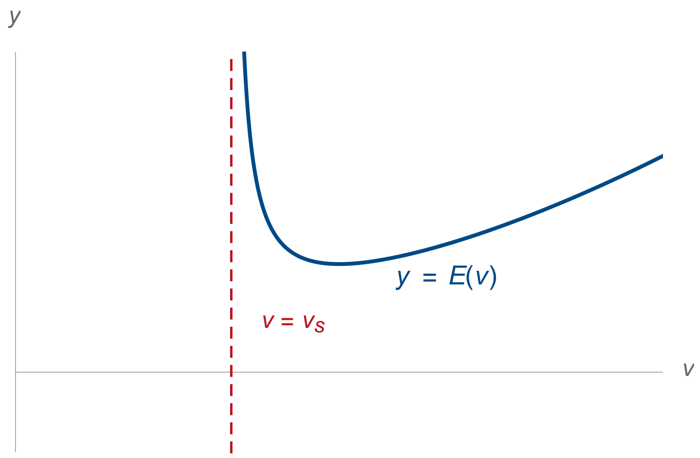
$$E'(v) = K\frac{3v^2(v - v_s) - v^3}{(v - v_s)^2} = Kv^2\frac{2v - 3v_s}{(v - v_s)^2} = 0 \Leftrightarrow v = \frac{3v_s}{2}.$$

Studerar vi derivatans tecken för $v > v_s$

v		$\frac{3v_s}{2}$	
$E'(v)$	$-$	0	$+$
$E(v)$	$\searrow$	$\frac{27Kv_s^2}{4}$	$\nearrow$

så ser vi att $E(v)$ antar sitt minsta värde för $v = 3v_s/2$.

Vi ser också att $E(v) \to \infty$ då $v \to v_s^+$. Att $v = v_s$ innebär ju att Pelle står still i förhållande till land och att han därför aldrig kommer fram till Kajsa trots att han simmar och förbrukar energi. Vidare har vi att $E(v)/v \to \infty$ då $v \to \infty$. Kurvan $y = E(v)$ har därför en lodrät asymptot $v = v_s$ men saknar sned asymptot.



Figur 2: Kurvan $y = E(v)$.

Pelle bör alltså simma med en fart som är 50% större än strömmens fart för att vara så pigg som möjligt då han kommer fram till Kajsa.