HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Tisdagen den 9 januari 2018
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna gränsvärdet (*2p*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\cos x - (1+x)e^{-x}}.$$

(b) Beräkna integralen (*3p*)

$$\int_1^4 \frac{1}{x^{3/2}+x}dx\,.$$

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^x, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. (a) Härled derivatan av e^x. (*1p*)

(b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' = 2x(1+y),$$

för vilken $\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x^2} = 1.$ (*4p*)

5. (a) För vilka värden på talet α är den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$$

konvergent? (*2p*)

(b) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då kurvan

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x}\,\ln(1+x)}, \quad x \geq 1,$$

roterar kring x-axeln. (*3p*)

6. (a) Härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner. (*1p*)

(b) På samma raka gata i en känd studentstad finns de två nattklubbarna Good-bar och Bad-bar. Good-bar är emellertid populärare än Bad-bar och därför fyra gånger stökigare. Var på gatan mellan nattklubbarna ska man bo om man vill ha det så tyst som möjligt då nattklubbarna är öppna?

Ljudnivån från en nattklubb är proportionell mot stökigheten och omvänt proportionell mot avståndet till nattklubben.

(*4p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Tisdagen den 9 januari 2018
Skrivtid: 9.00-14.00

Lösningsförslag

1. (a) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($-x \to 0$ då $x \to 0$):

$$\begin{aligned}\cos x - (1+x)e^{-x}x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) - (1+x)\left(1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)\right)\\ &= -\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4).\end{aligned}$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t.o.m. ordning 3:

$$\arctan x - \sin x = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right) = -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).$$

Vi får till slut

$$\frac{\arctan x - \sin x}{\cos x - (1+x)e^{-x}} = \frac{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{-\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x)} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0.$$

(b) Substitutionen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0$, ger $dx = 2tdt$ och vi får

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{x^{3/2}+x}dx &= \int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2(t+1)}2tdt = 2\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}dt = 2\int_1^2 \frac{1+t-t}{t(t+1)}dt\\ &= 2\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\big[\ln|t| - \ln|1+t|\big]_1^2 = 2\ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

2. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2}\\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(3x^2-2x+2)(x-1)^2 - (x^3-x^2+2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 3.\end{aligned}$$

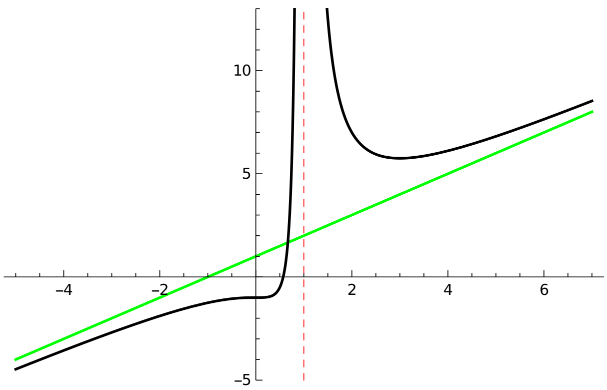
Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkten $x = 1$ där f och f' inte är definierade:

x		0		1		3	
$f'(x)$	+	0	+	$*$	$-$	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$*$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = 1$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 1$. P.g.a. att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2} = \underbrace{x+1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal terasspunkt i $x = 0$ med värdet $f(0) = -1$ och en lokal minimipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = \frac{23}{4}$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 1$ samt den sneda asymptoten $y = x + 1$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$.

3. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' - 3y' + 2y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = e^x. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 - 3r + 2$ har nollställena $r_1 = 1$ och $r_2 = 2$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom högerledet är en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör ansatsen:

$$y_p = ze^x \Rightarrow y_p' = (z' + z)e^x \Rightarrow y_p'' = (z'' + 2z' + z)e^x.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' - 3y' + 2y = (z'' + 2z' + z - 3(z' + z) + 2z)e^x = (z'' - z')e^x = e^x \Leftrightarrow z'' - z' = 1 \tag{2}$$

Om man inte ser direkt att $z = -x$ är en lösning till (2) hittar man enkelt den genom standardansatsen $z_p = ax \Rightarrow z_p' = a \Rightarrow z_p'' = 0$. Insättning i (2) ger

$$z'' - z' = 0 - a = 1 \Leftrightarrow a = -1.$$

och vi får $y_p = -xe^x$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x.$$

Från begynnelsvillkoren får vi

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1 - C_2 \\ y'(x) &= C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - e^x - xe^x \\ \Rightarrow y'(0) &= C_1 + 2C_2 - 1 - 0 = 1 - C_2 + 2C_2 - 1 = C_2 = 1. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = e^{2x} - xe^x.$$

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = e^x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} \to e^x \cdot 1 = e^x \text{ då } h \to 0$$

dvs $De^x = e^x$.

(b) Detta är en linjär *och* separabel differentialekvation. Löser vi den som en separabel observerar vi först att $y=-1$ är en lösning. För $y \neq -1$ får vi

$$\begin{aligned} y' = 2x(1+y) \Leftrightarrow \frac{1}{1+y}y' = 2x \Leftrightarrow \int \frac{1}{1+y}dy = \int 2x dx \\ \Leftrightarrow \ln|1+y| = x^2 + A \Leftrightarrow |1+y| = e^{x^2+A} = e^{x^2}e^A = Be^{x^2},\ B>0 \\ \Leftrightarrow 1+y = \pm Be^{x^2}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen ges alltså av

$$y(x) = Ce^{x^2} - 1.$$

där C är en godtycklig konstant och $C=0$ motsvarar fallet $y=-1$ ovan. Betraktar vi istället ekvationen som en linjär differentialekvation får vi

$$y' = 2x(1+y) \Leftrightarrow y' - 2xy = 2x$$

och multiplikation med den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{-x^2}$ ger:

$$\begin{aligned} y'e^{-x^2} + ye^{-x^2}(-2x) = D\left(ye^{-x^2}\right) = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow ye^{-x^2} = \int 2xe^{-x^2}dx = -e^{-x^2} + C \\ \Leftrightarrow y(x) = Ce^{x^2} - 1 \end{aligned}$$

dvs samma lösning som tidigare.
Vi får nu

$$\frac{y(x)}{x^2} = \frac{Ce^{x^2}-1}{x^2} \to 1 \text{ då } x \to 0 \Leftrightarrow C = 1 \quad \text{(standardgränsvärde)}$$

Den sökta lösningen är alltså $y(x) = e^{x^2} - 1$.

5. (a) Vi beräknar den generaliserade integralen för olika värden på α:

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \alpha = 1: & [\ln x]_1^R = \ln R - \ln 1 = \ln R \to \infty \text{ då } R \to \infty \\ \alpha \neq 1: & \left[-\frac{1}{\alpha-1}x^{-(\alpha-1)}\right]_1^R = -\frac{R^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \to \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{då } R\to\infty \text{ om } \alpha > 1. \\ \infty & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Resultatet visar att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är konvergent omm } \alpha > 1.$$

(b) Volymen ges av den generaliserade integralen

$$\pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}\ln(1+x)}\right)^2 dx.$$

Vi får:

$$\begin{aligned} \int_1^R \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}\ln(1+x)}\right)^2 dx = \int_1^R (\ln(1+x))^{-2}\frac{1}{1+x}dx = \left[-(\ln(1+x))^{-1}\right]_1^R \\ = -\frac{1}{\ln(1+R)} + \frac{1}{\ln(1+1)} \to 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \quad \text{då} \quad R \to \infty \end{aligned}$$

dvs volymen är $\dfrac{\pi}{\ln 2}$ v.e.

6. (a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är två deriverbara funktioner så söker vi derivatan av $f(x)g(x)$ och vi får differenskvoten

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &\to f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ då } h \to 0 \end{aligned}$$

dvs $D(fg) = f'g + fg'$.

(b) Låt ljudnivån på avståndet x från Bad-bar vara $l(x)$. Om s är stökigheten på Bad-bar, d avståndet mellan barerna och $k > 0$ proportionalitetskonstanten söker vi enligt uppgiften det värde på x för vilket funktionen

$$l(x) = k\Bigg(\underbrace{\frac{s}{x}}_{\text{Bad-Bar}} + \underbrace{\frac{4s}{d-x}}_{\text{Good-bar}}\Bigg), \; 0 < x < d,$$

antar sitt minsta värde. Derivering ger:

$$l'(x) = ks\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(d-x)^2}\right) = ks\frac{-(d-x)^2 + 4x^2}{x^2(d-x)^2} = ks\frac{(3x-d)(x+d)}{x^2(x-d)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{d}{3} \text{ eller } x = -d$$

där det andra nollstället inte är aktuellt i det här fallet eftersom $0 < x < d$. Studerar vi nu derivatans tecken

x	0		$\frac{d}{3}$		d
$l'(x)$	$*$	$-$	0	$+$	$*$
$l(x)$	$*$	$\searrow$	$l(\frac{d}{3})$	$\nearrow$	$*$

ser vi att $l(x)$ verkligen antar sitt minsta värde för $x = \frac{d}{3}$.