HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Torsdagen den 17 januari 2019
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Härled formeln för partiell integration. (*1p*)

   (b) Beräkna integralen (*2p*)
$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx\,.$$
   (c) Beräkna gränsvärdet (*2p*)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\ln(1-x)+e^x-1}.$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)
$$\begin{cases} y''+2y'+y=2e^{-x},\\ y(0)=y'(0)=1.\end{cases}$$

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till
$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$$
   samt eventuella asymptoter till kurvan $y=f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

4. (a) Härled derivatan av $\ln x$. (*1p*)

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen
$$y'=2xe^{-y},$$
   för vilken $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{x^2}=1$. (*4p*)

5. (a) Visa att den generaliserade integralen
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx$$
   är konvergent. (*2p*)

   (b) Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan
$$y=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)},\quad x\geq 1,$$
   roterar kring x-axeln. (*3p*)

6. Ingenjörsstudenten Kajsa läser en svår kurs i envariabelanalys och hon kunde ingenting av kursens innehåll vid kursstarten. Den hastighet med vilken Kajsa lär sig kursinnehållet är vid varje tidpunkt under kursens gång proportionell mot hur stor del av kursinnehållet hon har kvar att lära sig. Vi kan kalla proportionalitetskonstanten som motsvarar inlärningen för k.

   Kajsa glömmer dessvärre också momenten hon lärt sig tidigare i kursen med en hastighet som vid varje tidpunkt är proportionell mot hur stor del av kursinnehållet hon kan. Proportionalitetskonstanten är här $k/3$.

   Kursen går under 8 veckor. Efter två veckor ligger hon i fas d.v.s. hon kan då $1/4$ av innehållet i kursen. För att bli godkänd på tentan direkt efter avslutad kurs måste Kajsa kunna minst hälften av kursinnehållet. Klarar hon tentan? (*5p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Torsdagen den 17 januari 2019
Skrivtid: 15.00-20.00

Lösningsförslag

1. (a) Om $F'(x) = f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar har vi:

$$D(Fg) = F'g + Fg' = fg + Fg' \Leftrightarrow fg = D(Fg) - Fg'$$
$$\Leftrightarrow \int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

(b) Integralen beräknas enkelt med partiell integration enligt ovan:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\ln x\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

(c) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($-x \to 0$ då $x \to 0$):

$$\ln(1-x) + e^x - 1 = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) - 1 = -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t.o.m. ordning 3:

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) = \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

Vi får till slut

$$\frac{\sin x - x\cos x}{\ln(1-x) + e^x - 1} = \frac{\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)}{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)}{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x)} \to -2 \text{ då } x \to 0.$$

2. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' + 2y' + y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = 2e^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ har det dubbla nollstället $r_1 = r_2 = -1$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom högerledet är en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör ansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' + 2y' + y = (z'' - 2z' + z + 2(z' - z) + z)e^{-x} = z''e^{-x} = 2e^{-x} \Leftrightarrow z'' = 2$$

Integrering 2 ggr ger direkt att $z = x^2$ är en lösning. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2 + x^2)e^{-x}.$$

Från begynnelsvillkoren får vi

$$\begin{aligned} &y(0) = C_2 = 1, \\ &y'(x) = (C_1 + 2x)e^{-x} - (C_1 x + C_2 + x^2)e^{-x} = (C_1 + 2x - C_1 x - 1 - x^2)e^{-x}, \\ \Rightarrow\ &y'(0) = C_1 - 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 2. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}.$$

3. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x+2)^2(x-2)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = \pm 2\sqrt{3}.$$

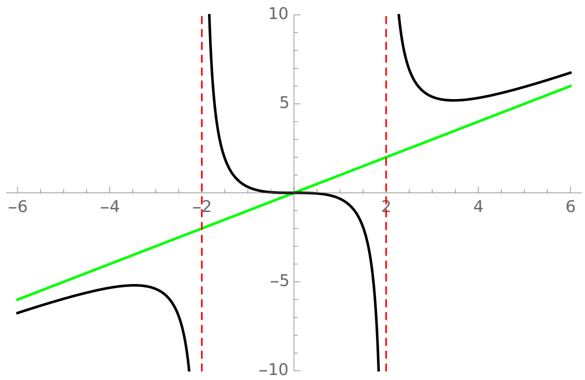
Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkterna $x = \pm 2$ där f och f' inte är definierade:

x		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-2\sqrt{3})$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(2\sqrt{3})$	$\nearrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = \pm 2$ har $f(x)$ de lodräta asymptoterna $x = \pm 2$. P.g.a. att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} = \underbrace{x}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{4x}{x^2-4}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal terasspunkt i $x = 0$ med värdet $f(0) = 0$, en lokal maximipunkt i $x = -2\sqrt{3}$ med värdet $f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$ samt en lokal minimipunkt i $x = 2\sqrt{3}$ med värdet $f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$. Kurvan $y = f(x)$ har de lodräta asymptoterna $x = \pm 2$ samt den sneda asymptoten $y = x$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = \ln x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x}$$
$$= \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1} \frac{1}{x} \to 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{ då } h \to 0$$

dvs $D \ln x = \frac{1}{x}$.

(b) Efter omskrivning ser vi att detta är en separabel differentialekvation:

$$y' = 2xe^{-y} \Leftrightarrow e^y y' = 2x \Leftrightarrow \int e^y dy = \int 2x dx \Leftrightarrow e^y = x^2 + C.$$

Den allmänna lösningen ges alltså av

$$y(x) = \ln(x^2 + C)$$

där C är en godtycklig konstant. Vi får nu

$$\frac{y(x)}{x^2} = \frac{\ln(x^2 + C)}{x^2} \to 1 \text{ då } x \to 0 \Leftrightarrow C = 1 \quad \text{(standardgränsvärde)}$$

Den sökta lösningen är alltså $y(x) = \ln(x^2 + 1)$.

5. (a) För $0 < x \leq 1$ är

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1 + 0)} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Eftersom $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ är konvergent omm $\alpha < 1$ är integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x^2)} \quad \text{konvergent.}$$

För $x > 1$ är

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}(0 + x^2)} = \frac{1}{x^{5/2}}.$$

Eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ är konvergent omm $\alpha > 1$ är integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x^2)} \quad \text{konvergent.}$$

Den sökta generaliserade integralen är summan av de båda ovanstående och den är därför också konvergent.
Anm: Ett annat sätt att visa att den är konvergent är att beräkna den men det blir ganska jobbigt i det här fallet. Gör man det blir integralens värde $\pi/\sqrt{2}$ om man lyckas räkna rätt.

(b) Volymen ges av den generaliserade integralen

$$\pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)} \right)^2 dx.$$

Vi får:

$$\begin{aligned}
\int_1^R \left(\frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)} \right)^2 dx &= \int_1^R \frac{1}{x(1 + x)^2} dx \underset{\text{PBU}}{=} \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{(x + 1)^2} \right) dx \\
&= \left[\ln|x| - \ln|x + 1| + \frac{1}{x + 1} \right]_1^R = \ln\left(\frac{R}{R + 1} \right) + \frac{1}{R + 1} - \left(\ln\left(\frac{1}{1 + 1} \right) + \frac{1}{1 + 1} \right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{R}} \right) + \frac{1}{R + 1} + \ln 2 - \frac{1}{2} \to 0 + 0 + \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad R \to \infty
\end{aligned}$$

dvs volymen är $\pi\big(\ln 2 - \frac{1}{2}\big)$ v.e.

6. Om $y(t)$ är den del av kursens innehåll Kajsa kan t veckor efter kursstart ($0 \leq y \leq 1$) är enligt problemtexten

$$y'(t) = k(1 - y(t)) - \frac{k}{3} y(t) \Leftrightarrow y'(t) + \frac{4k}{3} y(t) = k, \; 0 \leq t \leq 8,$$

som är en linjär differentialekvation. Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{G(t)} = e^{\frac{4kt}{3}}$ ger:

$$y' e^{\frac{4kt}{3}} + y e^{\frac{4kt}{3}} \frac{4k}{3} = D(y e^{\frac{4kt}{3}}) = k e^{\frac{4kt}{3}} \Leftrightarrow y e^{\frac{4kt}{3}} = \int k e^{\frac{4kt}{3}} dt = \frac{3}{4} e^{\frac{4kt}{3}} + C$$

Den allmänna lösningen ges alltså av

$$y(t) = \frac{3}{4} + C e^{-\frac{4kt}{3}}.$$

Eftersom Kajsa inte kan någonting av innehållet vid kursstart är

$$y(0) = \frac{3}{4} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{4}.$$

Efter 2 veckor kan Kajsa 1/4 av innehållet i kursen dvs:

$$y(2) = \frac{3}{4}\big(1 - e^{-\frac{4k\cdot 2}{3}}\big) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Vi får slutligen

$$y(t) = \frac{3}{4}\big(1 - e^{-\frac{4\frac{3}{8}\ln(\frac{3}{2})t}{3}}\big) = \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{t/2}\right).$$

Den del av kursen som Kajsa kan vid kursens slut efter 8 veckor är nu

$$y(8) = \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right) = \frac{65}{108} > \frac{1}{2}.$$

Kajsa klarar alltså tentan!