HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Fredagen den 15 januari 2021
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Utgå från derivatans definition och härled derivatan av $\ln x$. (*1p*)

   (b) Beräkna integralen (*2p*)

$$\int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}\,dx\,.$$

   (c) Beräkna gränsvärdet (*2p*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\cos x - e^x + 2}{\sin(-x) + \arctan x}.$$

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = \frac{x^2-2x+5}{1-x}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 6xe^{-x}, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. (a) Härled formeln för partiell integration. (*1p*)

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy' + 2y = e^x$$

   för vilken $\lim_{x\to 0} y(x) = \frac{1}{2}$. (*4p*)

5. (a) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}\,dx$$

   är konvergent utan att beräkna den. (*2p*)

   (b) Beräkna den generaliserade integralen i (a). (*3p*)

6. (a) Utgå från derivatans definition och härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner. (*1p*)

   (b) Ventilationsingenjören Pelle kryper i en ventilationstunnel som överallt har kvadratiskt tvärsnitt med sidan 1 m. Han bär med sig ett smalt rakt rör som är 3.5 m långt. På ett ställe korsar ventilationstunneln en annan tunnel (med samma tvärsnitt) i rät vinkel. Kan Pelle fortsätta åt vänster i korsningen utan att böja röret? (*4p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Fredagen den 15 januari 2021
Skrivtid: 15.00-20.00

Lösningsförslag

1. (a) Med $f(x) = \ln x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{\ln\left(\frac{x+h}{h}\right)}{h} = \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\text{Standardgränsv.}} \frac{1}{x}$$

$$\to 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \quad \text{då} \quad \frac{h}{x} \to 0 \quad \text{dvs då} \quad h \to 0.$$

$\therefore D \ln x = \dfrac{1}{x}$.

(b) Substitutionen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0$, ger $dx = 2tdt$ och vi får

$$\int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2(t+1)}2tdt = 2\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}dt = 2\int_1^2 \frac{1+t-t}{t(t+1)}dt$$
$$= 2\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left[\ln|t| - \ln|1+t|\right]_1^2$$
$$= 2(\ln 2 - \ln 3 - (\ln 1 - \ln 2)) = 2\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

(c) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Utnyttjar vi entydigheten hos Maclaurinutvecklingen ($-x \to 0$ då $x \to 0$) eller bara det faktum att $\sin(-x) = -\sin x$ får vi:

$$\sin(-x) + \arctan x = -x + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) + \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right) = -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t.o.m. ordning 3:

$$(x-1)\cos x - e^x + 2 = (x-1)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)\right) + 2$$
$$= -\frac{2x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4).$$

Vi får till slut

$$\frac{(x-1)\cos x - e^x + 2}{\sin(-x) + \arctan x} = \frac{-\frac{2x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)}{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{-\frac{2}{3} + \mathcal{O}(x)}{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)} \to 4 \text{ då } x \to 0.$$

2. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{1-x}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2)(1-x) - (x^2-2x+5)(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(3-x)}{(x-1)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ eller } x = 3.$$

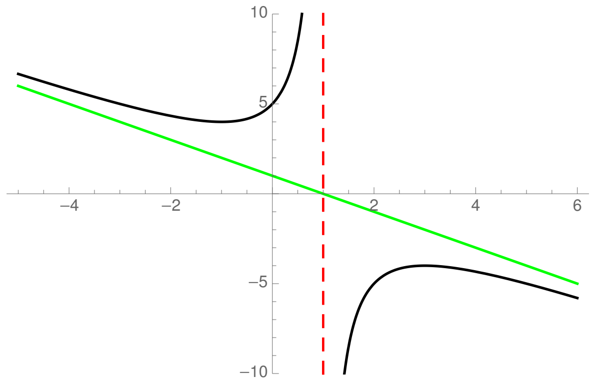
Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkten $x = 1$ där f och f' inte är definierade:

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$*$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$*$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = 1$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 1$. P.g.a. att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{1 - x} = \underbrace{-x + 1}_{\text{Sned asymptot}} - \frac{4}{x - 1}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal minimipunkt i $x = -1$ med värdet $f(-1) = 4$ samt samt en lokal maximipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = -4$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 1$ samt den sneda asymptoten $y = -x + 1$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{1 - x}$.

3. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' + 2y' + y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = 6xe^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 2r + 1 = (x + 1)^2 = 0$ har rötterna $r_1 = r_2 = -1$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom högerledet är ett polynom multiplicerat med en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör ansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' + 2y' + y = (z'' - 2z' + z + 2(z' - z) + z)e^{-x} = z''e^{-x} = 6xe^{-x} \Leftrightarrow z'' = 6x \tag{2}$$

Integrering 2 ggr ger direkt att $z = x^3$ är en lösning. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2 + x^3)e^{-x}.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned}
&y(0) = C_2 = 1,\\
&y'(x) = (C_1 + 3x^2)e^{-x} - (C_1 x + C_2 + x^3)e^{-x} = (C_1(1 - x) - 1 + x^2(3 - x))e^{-x}\\
\Rightarrow\ &y'(0) = C_1 - 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 2.
\end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (x^3 + 2x + 1)e^{-x}.$$

4. (a) Om $F'(x) = f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar har vi:

$$D(Fg) = F'g + Fg' = fg + Fg' \Leftrightarrow fg = D(Fg) - Fg'$$
$$\Leftrightarrow \int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

(b) Detta är en linjär differentialekvation:

$$xy' + 2y = e^x \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$$

och multiplikation med den integrerande faktorn

$$e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln|x|^2} = e^{\ln x^2} = x^2$$

ger

$$y'x^2 + y \cdot 2x = D(yx^2) = xe^x \Leftrightarrow yx^2 = \int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Den allmänna lösningen ges nu av

$$y(x) = \frac{e^x(x-1) + C}{x^2}$$

där C är en godtycklig konstant. Eftersom vi vet att $\lim_{x\to 0} y(x) = \frac{1}{2}$ får vi

$$\frac{e^x(x-1)+C}{x^2} = \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3))(x-1) + C}{x^2} = \frac{-1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) + C}{x^2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{C-1}{x^2} + \mathcal{O}(x) \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0 \Leftrightarrow C = 1.$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}.$$

5. (a) Integralen är generaliserad på ett sätt (obegränsat integrationsområde). För $x \geq 1$ har vi

$$0 \leq \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} \leq \frac{\ln(x^2+x^2)}{x^3} = \frac{\ln(2x^2)}{x^3} = \frac{\ln 2 + 2\ln x}{x^3} = \frac{\ln 2}{x^3} + 2\frac{\ln x}{x}\frac{1}{x^2} \leq \frac{\ln 2}{x^3} + \frac{2}{x^2} \leq \frac{2 + \ln 2}{x^2}$$

där vi också utnyttjade att $\ln x \geq 0$ för $x \geq 1$ och $\frac{\ln x}{x} \to 0$ då $x \to \infty$ dvs för tillräckligt stora x kan vi vara säkra på att $0 < \frac{\ln x}{x} < 1$.
$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent omm $\alpha > 1$ vilket betyder att $(2 + \ln 2)\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ är konvergent. Enligt instängningssatsen är därför även den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx$$

konvergent.

(b) Med substitutionen $t = x^2, x \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, partiell integration och PBU:n från uppg. 1b får vi

$$\int_1^R \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} = \int_1^{R^2} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_1^{R^2} \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^{R^2} + \int_1^{R^2} \frac{1}{t(1+t)}dt\right) = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^{R^2} + \int_1^{R^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln|t| - \ln|1+t|\right]_1^{R^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^{R^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(1+R^2)}{R^2} + \ln\left(\frac{R^2}{1+R^2}\right) + \ln 2 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(1+R^2)}{1+R^2}\frac{1+R^2}{R^2} + \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{R^2}+1}\right) + 2\ln 2\right) \to \frac{1}{2}\left(-0\cdot 1 + \ln 1 + 2\ln 2\right) = \ln 2$$

då $R \to \infty$. Sammanfattningsvis är alltså:

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} = \ln 2.$$

6. (a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är två deriverbara funktioner så söker vi derivatan av $f(x)g(x)$ och vi får differenskvoten

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \text{ då } h\to 0\end{aligned}$$

dvs $D(fg)=f'g+fg'$.

(b) Vi börjar med att ta reda på hur långt rör Pelle får med sig runt hörnet om röret transporteras horisontellt. Vi behöver alltså veta det minsta värdet på sträckan s (se figur 2). De båda trianglarna i figuren är likformiga och vi får direkt $y=\frac{1}{x}$ vilket ger

$$s(x)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},\ x>0.$$

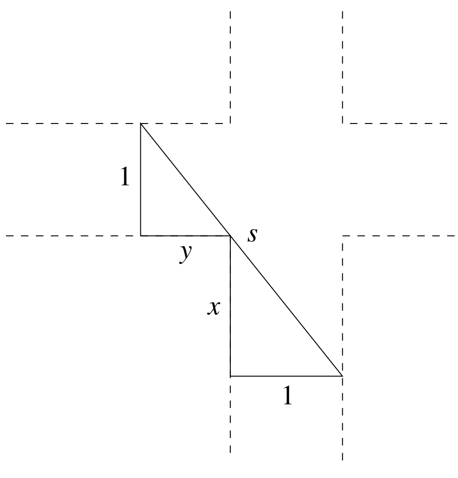
Stationära punkter:

$$s'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}2x+\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{x^3-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}=0\Leftrightarrow x=1.$$

Studerar vi derivatans tecken

x		1	
$s'(x)$	$-$	0	$+$
$s(x)$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$

ser vi att s antar sitt minsta värde $2\sqrt{2}$ för $x=1$. Pelle kan klara ett längre rör om han vinklar det så att ena änden rör taket och den andra rör golvet. s bildar då hypotenusan i en rätvinklig triangel vars kateter har längden 1 m respektive $2\sqrt{2}$ m. Hypotenusans längd är därför $\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$ m vilket också är längden på det längsta rör Pelle kan transportera genom svängen utan att böja det. Pelle måste alltså böja sitt rör för att komma förbi korsningen.



Figur 2: Vi söker det minsta värdet på sträckan s.