HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Fredagen den 14 januari 2022
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna gränsvärdet (*2p*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x\cos x}{e^{-x} + \ln(1+x) - 1}.$$

(b) Beräkna integralen (*3p*)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx\,.$$

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 3}{x^2 - 2x + 1}$$

samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2xe^{-x}, \\ y(0) = y'(0) = -1. \end{cases}$$

4. (a) Utgå från derivatans definition och härled derivatan av e^x. (*1p*)

(b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy' + y = xe^x$$

för vilken $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$. (*4p*)

5. (a) För vilka värden på talet α är den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

konvergent? (*1p*)

(b) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

är konvergent utan att beräkna den. (*2p*)

(c) Beräkna den generaliserade integralen i (b). (*2p*)

6. (a) Härled formeln för partiell integration. (*1p*)

(b) Bakingenjören Pelle bakar en god kaka. När Pelle tar ut kakan från ugnen är dess temperatur 220 °C och han låter den därför svalna en stund i ett stort rum som har temperaturen 20 °C. Efter 5 minuter är kakans temperatur 120 °C dvs fortfarande för varm för att ätas. Vad är kakans temperatur efter 20 minuter?

Vi kan anta att Newtons avsvalningslag gäller dvs avsvalningshastigheten är proportionell mot differensen mellan kakans temperatur och omgivningens temperatur. (*4p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Fredagen den 14 januari 2022
Skrivtid: 15.00-20.00

Lösningsförslag

1. (a) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Utnyttjar vi entydigheten hos Maclaurinutvecklingen ($-x \to 0$ då $x \to 0$) får vi:

$$e^{-x} + \ln(1+x) - 1 = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) - 1 = \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t.o.m. ordning 3:

$$\arctan x - x\cos x = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right) = \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).$$

Vi får till slut

$$\frac{\arctan x - x\cos x}{e^{-x} + \ln(1+x) - 1} = \frac{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x)} \to 1 \text{ då } x \to 0.$$

(b) Substitutionen $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$ ger $dx = \frac{1}{t}dt$. $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$, $x = \ln 2 \Leftrightarrow t = 2$ och vi får

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = \int_1^2 \frac{t-1}{t(t+1)}dt \underset{\text{PBU}}{=} \int_1^2 \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}\right)dt = \Big[2\ln|t+1| - \ln|t|\Big]_1^2$$
$$= 2\ln 3 - \ln 2 - (2\ln 2 - \ln 1) = 2\ln 3 - 3\ln 2 = \ln\left(\frac{9}{8}\right).$$

2. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 3}{(x-1)^2}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2 - 6x + 6)(x-1)^2 - (x^3 - 3x^2 + 6x - 3)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 3.$$

Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkten $x = 1$ där f och f' inte är definierade:

x		0		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$*$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

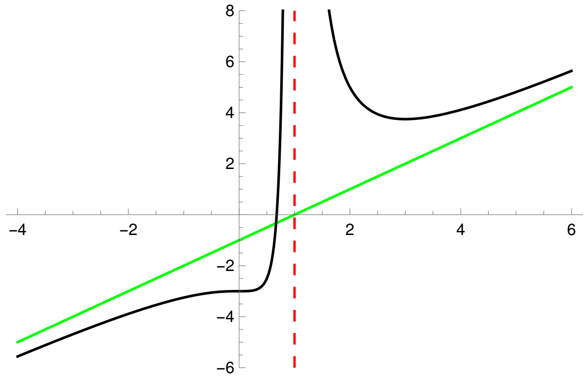
Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = 1$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 1$. P.g.a. att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 3}{x^2 - 2x + 1} = \underbrace{x - 1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal terasspunkt i $x = 0$ med värdet $f(0) = -3$ samt samt en lokal minimipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = \frac{15}{4}$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 1$ samt den sneda asymptoten $y = x - 1$ då $x \to \pm\infty$.

3. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' + 3y' + 2y = 0$$



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 6x - 3}{x^2 - 2x + 1}$.

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = 2xe^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 3r + 2 = 0$ har rötterna $r_1 = -1$ och $r_2 = -2$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom högerledet är ett polynom multiplicerat med en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör ansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' + 3y' + 2y = (z'' - 2z' + z + 3(z' - z) + 2z)e^{-x} = (z'' + z')e^{-x} = 2xe^{-x} \Leftrightarrow z'' + z' = 2x \tag{2}$$

Ansatsen $z_p = (ax + b)x = ax^2 + bx \Rightarrow z_p' = 2ax + b \Rightarrow z_p'' = 2a$ insatt i (2) ger nu

$$z'' + z' = 2a + 2ax + b = 2x \Leftrightarrow a = 1,\ b = -2$$

och vi får $y_p = (x^2 - 2x)e^{-x}$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 x^{-2x} + (x^2 - 2x)e^{-x}.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_1 = -1 - C_2, \\ y'(x) &= -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} + (2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x)e^{-x}(-1) \\ \Rightarrow y'(0) &= -C_1 - 2C_2 - 2 = 1 + C_2 - 2C_2 - 2 = -1 \Leftrightarrow C_1 = -1,\ C_2 = 0. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}.$$

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = e^x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} \to e^x \cdot 1 = e^x \text{ då } h \to 0$$

dvs $De^x = e^x$.

(b) Detta är en linjär differentialekvation

$$xy' + y = xe^x$$

där vi ser att vänsterledet är derivatan av xy dvs

$$D(xy) = xe^x \Leftrightarrow xy = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C.$$

Den allmänna lösningen ges nu av

$$y(x) = \frac{e^x(x-1)+C}{x}$$

där C är en godtycklig konstant. Eftersom vi vet att $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$ får vi

$$\begin{aligned}\frac{e^x(x-1)+C}{x} &= e^x - \frac{e^x - C}{x} \to 0 \text{ då } x \to 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{e^x - C}{x} \to 1 \text{ då } x \to 0 \Leftrightarrow C = 1\end{aligned}$$

där vi utnyttjade standardgränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x}.$$

Anm: Om vi inte direkt ser att vänsterledet är derivatan av xy kan vi utnyttja standardmetoden och skriva om ekvationen på normalform

$$y' + \frac{1}{x}y = e^x$$

och sedan multiplicera med den integrerande faktorn $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = |x| = \pm x$ vilket ger tillbaka $D(xy)$ i vänsterledet (oavsett om vi använder x eller $-x$).

5. (a) Vi beräknar den generaliserade integralen för olika värden på α:

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \alpha = 1: & [\ln x]_\epsilon^1 = \ln 1 - \ln\epsilon = -\ln\epsilon \to \infty \text{ då } \epsilon \to 0^+ \\ \alpha \neq 1: & \left[-\frac{1}{\alpha-1}x^{-(\alpha-1)}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \to \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{då } \epsilon \to 0^+ \text{ om } \alpha < 1. \\ \infty & \text{då } \epsilon \to 0^+ \text{ om } \alpha > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Resultatet visar att

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är konvergent omm } \alpha < 1.$$

(b) Vi observerar först att integralen är generaliserad på två sätt och vi gör därför uppdelningen:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Den generaliserade integralen är konvergent omm båda integralerna i HL är konvergenta.
För $0 < x \leq 1$ är

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+0)} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Eftersom $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent omm $\alpha < 1$ är integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad \text{konvergent.}$$

För $x > 1$ är

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}(0+x)} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent omm $\alpha > 1$ är integralen

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad \text{konvergent.}$$

Eftersom den sökta generaliserade integralen är summan av de båda ovanstående är den därför också konvergent.

(c) Med substitutionen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$, $t > 0, \Rightarrow dx = 2tdt$, får vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{1}{t(1+t^2)}2tdt = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2\arctan t + C = 2\arctan x^2 + C.$$

Utnyttjar vi nu denna primitiva funktion vid beräkningen av de båda generaliserade integralerna i (b) får vi

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \big[2\arctan x^2\big]_\epsilon^1 = 2(\arctan 1 - \arctan \epsilon^2) \to 2\big(\frac{\pi}{4} - 0\big) = \frac{\pi}{2} \text{ då } \epsilon \to 0^+,$$
$$\int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \big[2\arctan x^2\big]_1^R = 2(\arctan R^2 - \arctan 1) \to 2\big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\big) = \frac{\pi}{2} \text{ då } R \to \infty,$$

dvs

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \pi.$$

6. (a) Om $F'(x) = f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar har vi:

$$D(Fg) = F'g + Fg' = fg + Fg' \Leftrightarrow fg = D(Fg) - Fg'$$
$$\Leftrightarrow \int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

(b) Kakans temperatur följer Newtons avsvalningslag dvs om $T(t)$ är dess temperatur vid tiden t har vi

$$T'(t) = -k(T(t) - T_\mathrm{r}) \Leftrightarrow T'(t) + kT(t) = kT_\mathrm{r}$$

där T_r är temperaturen i rummet och $k > 0$ en konstant. Detta är en linjär differentialekvation av 1:a ordningen som kan lösas på vanligt sätt genom multiplikation med den integrerande faktorn e^{kt}:

$$T'(t)e^{kt} + T(t)e^{kt}k = D(T(t)e^{kt}) = kT_\mathrm{r}e^{kt} \Leftrightarrow T(t)e^{kt} = \int kT_\mathrm{r}e^{kt}dt = T_\mathrm{r}e^{kt} + C$$
$$\Leftrightarrow T(t) = Ce^{-kt} + T_\mathrm{r}$$

där C är en konstant. Om begynnelsetemperaturen (dvs kakans temperatur då Pelle tar ut den ur ugnen) är T_0 har vi:

$$T(0) = Ce^0 + T_\mathrm{r} = T_0 \Leftrightarrow C = T_0 - T_\mathrm{r}$$

och vi får

$$T(t) = (T_0 - T_\mathrm{r})e^{-kt} + T_\mathrm{r}\,.$$

Eftersom $T_0 = 220\,^\circ$C och kakans temperatur efter 5 min är 120 °C vid $T_\mathrm{r} = 20\,^\circ$C får vi

$$T(5) = (220 - 20)e^{-k\cdot 5} + 20 = 120 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{5}$$

dvs

$$T(t) = 200e^{-\frac{\ln 2}{5}t} + 20 = 200 \cdot 2^{-t/5} + 20\,.$$

Kakans temperatur efter 20 minuter är alltså

$$T(20) = 200 \cdot 2^{-20/5} + 20 = 200 \cdot 2^{-4} + 20 = \frac{65}{2} = 32.5\,^\circ\mathrm{C}.$$