HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Tisdagen den 10 januari 2023
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna integralen *(2p)*

$$\int_1^e \frac{1-\ln x}{x}\,dx\,.$$

   (b) Beräkna gränsvärdet *(3p)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{e^{-x}+\ln(1+x)-1}.$$

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x)=\frac{2x^2-3x}{x-2}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y=f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

3. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y''-2y'+y=2(3x+1)e^x, \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

4. (a) Utgå från derivatans definition och härled derivatan av $\sin x$. *(1p)*

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y'-xy^2\sin x=0$$

   för vilken $y(0)=1$. *(4p)*

5. (a) För vilka värden på talet α är den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

   konvergent? *(1p)*

   (b) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

   är konvergent utan att beräkna den. *(2p)*

   (c) Beräkna den generaliserade integralen i (b). *(2p)*

6. (a) Visa att differentialekvationen $y'(x)+g(x)y(x)=h(x)$ har den allmänna lösningen

$$y(x)=e^{-G(x)}\int h(x)e^{G(x)}\,dx$$

   där $G(x)$ är en primitiv funktion till $g(x)$. *(1p)*

   (b) Flugingenjören Kajsa studerar sin flugodling. Flugornas förökningshastighet vid tiden t är proportionell mot antalet flugor $y(t)$ vid denna tidpunkt. Proportionalitetskonstanten är dock inte konstant utan årstidsberoende och kan beskrivas av en periodisk funktion av typen $\alpha(t)=A\sin(kt)$ med perioden 12 månader. Antalsenheten är tusental och tidsenheten är månader. Kajsa startar med 1000 flugor och efter 2 månader är antalet flugor 3000. Vilket är det största antalet flugor Kajsa kan ha i sin flugodling? *(4p)*

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Tisdagen den 10 januari 2023
Skrivtid: 9.00-14.00

Lösningsförslag

1. (a) Substitutionen $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$ ger $dx = e^t dt$. $x = 1 \Leftrightarrow t = 0$, $x = e \Leftrightarrow t = 1$ och vi får

$$\int_1^e \frac{1-\ln x}{x}dx = \int_0^1 \frac{1-t}{e^t}e^t dt = \int_0^1 (1-t)dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(b) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Utnyttjar vi entydigheten hos Maclaurinutvecklingen ($-x \to 0$ då $x \to 0$) får vi:

$$e^{-x} + \ln(1+x) - 1 = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) - 1 = \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t.o.m. ordning 3:

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right) = \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

Vi får till slut

$$\frac{\sin x - x\cos x}{e^{-x} + \ln(1+x) - 1} = \frac{\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)}{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)}{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x)} \to 2 \text{ då } x \to 0.$$

2. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x-3)(x-2) - (2x^2-3x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = 3.$$

Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkten $x = 2$ där f och f' inte är definierade:

x		1		2		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = 2$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 2$. P.g.a. att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x-2} = \underbrace{2x+1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{2}{x-2}.$$

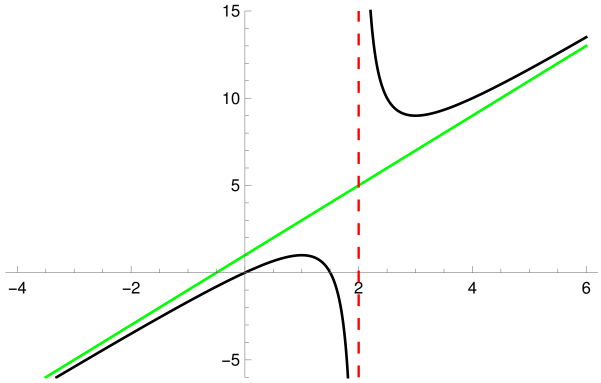
Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal maximipunkt i $x = 1$ med värdet $f(1) = 1$ samt samt en lokal minimipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = 9$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 2$ samt den sneda asymptoten $y = 2x + 1$ då $x \to \pm\infty$.

3. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' - 2y' + y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = 2(3x+1)e^x. \tag{1}$$



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2}$.

Lösning till homogena ekvationen: Den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ har rötterna $r_1 = r_2 = 1$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^x.$$

Partikulärlösning: Eftersom högerledet är ett polynom multiplicerat med en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör ansatsen:

$$y_p = ze^x \Rightarrow y_p' = (z' + z)e^x \Rightarrow y_p'' = (z'' + 2z' + z)e^x.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' - 2y' + y = (z'' + 2z' + z - 2(z' + z) + z)e^x = z''e^x = 2(3x+1)e^x \Leftrightarrow z'' = 2(3x+1) = 6x + 2$$

Integrering 2 ggr ger direkt att $z = x^3 + x^2$ är en lösning och vi får $y_p = (x^3 + x^2)e^x$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2 + x^3 + x^2)e^x.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 1, \\ y'(x) &= (C_1 + 3x^2 + 2x)e^x + (C_1 x + C_2 + x^3 + x^2)e^x \\ \Rightarrow y'(0) &= C_1 + C_2 = C_1 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 0. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (x^3 + x^2 + 1)e^x.$$

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = \sin x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to ?} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}$$

Vi behöver nu beräkna det första gränsvärdet:

$$\begin{aligned} \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\sin h \frac{\sin h}{h} \frac{1}{\cos h + 1} \\ &\to 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = 0 \text{ då } h \to 0 \end{aligned}$$

dvs $D \sin x = \cos x$.

(b) Vi ser direkt att $y(x) = 0$ är en lösning men det är inte den vi söker eftersom $y(0) = 1$. Efter division med $y^2 \neq 0$ och omskrivning ser vi att detta är en separabel differentialekvation:

$$y' - 2xy^2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}y' = x \sin x \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y}$$
$$= \int x \sin x dx = -x \cos x + \int 1 \cdot \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Den allmänna lösningen ges alltså av

$$y(x) = \frac{1}{x \cos x - \sin x - C}$$

där C är en godtycklig konstant. Vi får nu

$$y(0) = \frac{1}{0 \cos 0 - \sin 0 - C} = \frac{1}{-C} = 1 \Leftrightarrow C = -1$$

och den sökta lösningen är

$$y(x) = \frac{1}{x \cos x - \sin x + 1}.$$

5. (a) Vi beräknar den generaliserade integralen för olika värden på α:

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \alpha = 1: \ [\ln x]_1^R = \ln R - \ln 1 \to \infty \text{ då } R \to \infty \\ \alpha \neq 1: \ \left[-\frac{1}{\alpha-1}x^{-(\alpha-1)}\right]_1^R = \frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \to \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha > 1. \\ \infty & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Resultatet visar att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är konvergent omm } \alpha > 1.$$

(b) Eftersom $\frac{e^x}{x^2} \to \infty$ då $x \to \infty$ är $x^2 < e^x$ för tillräckligt stora $x > 1$. För dessa x har vi:

$$0 \leq \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \leq \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x^2}.$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent omm $\alpha > 1$ dvs. den är konvergent om $\alpha = 2$ vilket medför att även

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1} \quad \text{är konvergent.}$$

Anm: Den generaliserade integralen kan delas upp enligt $\int_0^\infty ... = \int_0^1 ... + \int_1^\infty ...$. Eftersom den första integralen inte är generaliserad bestäms konvergensen av den andra och för att visa att den är konvergent utnyttjar vi jämförelsen med $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$.

(c) Med substitutionen $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t}dt$, $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$, $x \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty$ får vi

$$\int_0^R \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int_1^{R_1} \frac{t}{t^2+1}\frac{1}{t}dt = \int_1^{R_1} \frac{1}{t^2+1}dt = [\arctan t]_1^{R_1}$$
$$= \arctan R_1 - \arctan 1 \to \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ då } R_1 \to \infty$$

dvs.

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \frac{\pi}{4}.$$

6. (a) Om $G'(x) = g(x)$ har vi

$$y' + g(x)y = h(x) \Leftrightarrow y'e^{G(x)} + ye^{G(x)}g(x) = D(ye^{G(x)}) = h(x)e^{G(x)} \Leftrightarrow ye^{G(x)} = \int h(x)e^{G(x)}dx$$
$$\Leftrightarrow y(x) = e^{-G(x)} \int h(x)e^{G(x)}dx.$$

(b) Enligt uppgiften har vi

$$y'(t) = \alpha(t)y(t) = A\sin(kt)y(t)$$

vilket är en linjär och homogen differentialekvation av första ordningen[1]. Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\frac{A}{k}\cos kt}$ ger:

$$D(ye^{\frac{A}{k}\cos kt}) = 0 \Leftrightarrow ye^{\frac{A}{k}\cos kt} = C.$$

Den allmänna lösningen ges alltså av

$$y(t) = Ce^{-\frac{A}{k}\cos kt}$$

där C är en godtycklig konstant.
Enligt uppgiften startar Kajsa med 1000 flugor dvs

$$y(0) = Ce^{-\frac{A}{k}\cos 0} = Ce^{-\frac{A}{k}} = 1 \Leftrightarrow C = e^{\frac{A}{k}}.$$

Eftersom $\alpha(t)$ har perioden 12 är $k = \pi/6$ och vi får

$$y(t) = e^{\frac{6A}{\pi}(1-\cos\frac{\pi t}{6})}.$$

Efter 2 månader är antalet flugor 3000 dvs.

$$y(2) = e^{\frac{6A}{\pi}(1-\cos\frac{\pi}{6}2)} = e^{\frac{6A}{\pi}(1-\frac{1}{2})} = e^{\frac{3A}{\pi}} = 3 \Leftrightarrow A = \frac{\pi\ln 3}{3}.$$

Antalet flugor vid tiden t ges alltså av

$$y(t) = e^{2\ln(3)(1-\cos\frac{\pi t}{6})} = 3^{2(1-\cos\frac{\pi t}{6})}$$

som antar sitt största värde då $\cos\frac{\pi t}{6} = -1$ vilket sker t.ex. då $t = 6$. Eftersom

$$y(6) = 3^4 = 81$$

kan Kajsa maximalt ha 81000 flugor i sin flugodling.

[1] Den är även separabel.