HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Tisdagen den 9 januari 2024
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna integralen (*2p*)

$$\int_0^2 \frac{2}{|x-1|+x}dx\,.$$

(b) Beräkna gränsvärdet (*3p*)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+(1-x)\cos(x)-2}{\sin(x)-\arctan(x)}.$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)

$$\begin{cases} y''-y=4xe^{-x}, \\ y(0)=1,\, y'(0)=0. \end{cases}$$

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}$$

samt eventuella asymptoter till kurvan $y=f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

4. (a) Utgå från derivatans definition och härled derivatan av $\ln x$. (*1p*)

(b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y'=\frac{y}{x(1+x)},\; x>0,$$

för vilken $\lim_{x\to\infty} y(x)=1$. (*4p*)

5. (a) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^{1/4}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$$

är konvergent. (*1p*)

(b) Använd Maclaurinpolynomet av grad 2 till e^{-x} för att beräkna ett approximativt värde på den generaliserade integralen i (a). (*2p*)

(c) Visa att approximationen i (b) har tre korrekta decimaler d.v.s. att felet är mindre än $0.5\cdot 10^{-3}$. (*2p*)

6. (a) Formulera Medelvärdessatsen och förklara innebörden av den med hjälp av en figur. (*1p*)

(b) Skogsägaren Pelle behöver en styv bräda och frågar träingenjören Sara hur han ska såga en stock med en viss diameter för att få den styvaste brädan. Sara förklarar då att styvheten på en bräda med rektangulärt tvärsnitt är proportionell mot tvärsnittets bredd samt mot tvärsnittets längd i kubik. Hur ska Pelle såga stocken för att utnyttja den maximalt och samtidigt få en så styv bräda som möjligt? Ange svaret som kvoten mellan tvärsnittets längd och bredd. (*4p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Tisdagen den 9 januari 2024
Skrivtid: 15.00-20.00

Lösningsförslag

1. (a) Eftersom $|x-1| = \begin{cases} x-1, \ x \geq 1 \\ 1-x, \ x<1 \end{cases}$ får vi

$$\int_0^2 \frac{2}{|x-1|+x}dx = \int_0^1 \frac{2}{1-x+x}dx + \int_1^2 \frac{2}{x-1+x}dx = \int_0^1 2dx + \int_1^2 \frac{2}{2x-1}dx$$
$$= \big[2x\big]_0^1 + \big[\ln|2x-1|\big]_1^2 = 2-0+\ln 3 - \ln 1 = 2+\ln 3.$$

(b) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren:

$$\sin x - \arctan x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right) = \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t.o.m. ordning 3:

$$e^x + (1-x)\cos(x) - 2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) + (1-x)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right) - 2$$
$$= \frac{2x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4).$$

Vi får till slut

$$\frac{e^x + (1-x)\cos(x) - 2}{\sin x - \arctan x} = \frac{\frac{2x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)}{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{\frac{2}{3} + \mathcal{O}(x)}{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)} \to 4 \text{ då } x \to 0.$$

2. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' - y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = 4xe^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 1 = (r+1)(r-1) = 0$ har rötterna $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom högerledet är ett polynom multiplicerat med en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör ansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' - y = (z'' - 2z' + z - z)e^{-x} = (z'' - 2z')e^{-x} = 4xe^{-x} \Leftrightarrow z'' - 2z' = 4x \tag{2}$$

Ansatsen $z_p = (ax+b)x = ax^2 + bx \Rightarrow z_p' = 2ax + b \Rightarrow z_p'' = 2a$ insatt i (2) ger nu

$$z'' - 2z' = 2a - 2(2ax+b) = -4ax + 2a - 2b = 4x \Leftrightarrow a = -1, \ b = -1$$

och vi får $y_p = -(x^2+x)e^{-x}$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - (x^2+x)e^{-x}.$$

Från begynnelsvillkoren får vi

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1 - C_2,$$
$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - (2x+1)e^{-x} - (x^2+x)e^{-x}(-1)$$
$$\Rightarrow y'(0) = C_1 - C_2 - 1 = 1 - C_2 - C_2 - 1 = -2C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0, \ C_1 = 1$$

och den sökta lösningen är

$$y(x) = e^x - (x^2+x)e^{-x}.$$

3. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^3}{3-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(3-x^2) - x^3(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{-x^4+9x^2}{(3-x^2)^2} = -\frac{x^2(x+3)(x-3)}{(3-x^2)^2}$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = \pm 3.$$

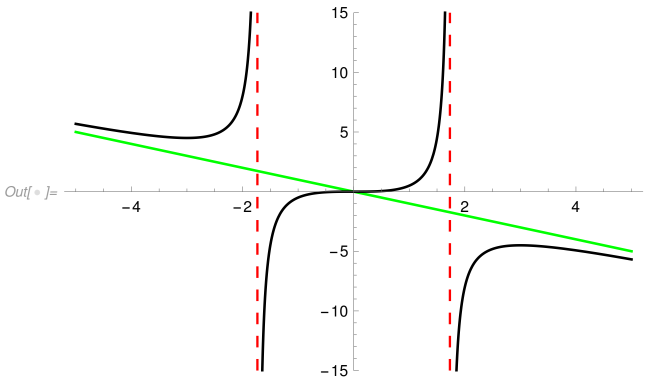
Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkterna $x = \pm\sqrt{3}$ där f och f' inte är definierade:

x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$*$	$+$	0	$+$	$*$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$	$*$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$*$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = \pm\sqrt{3}$ har $f(x)$ de lodräta asymptoterna $x = \pm\sqrt{3}$. P.g.a. att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{x^3}{3-x^2} = \underbrace{-x}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{3x}{3-x^2}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal minimipunkt i $x = -3$ med värdet $f(-3) = \frac{9}{2}$, en terasspunkt i $x = 0$ med värdet $f(0) = 0$ samt samt en lokal maximipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = -\frac{9}{2}$. Kurvan $y = f(x)$ har de lodräta asymptoterna $x = \pm\sqrt{3}$ samt den sneda asymptoten $y = -x$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = \ln x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\text{Standardgränsv.}} \frac{1}{x}$$
$$\to 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \quad \text{då} \quad \frac{h}{x} \to 0 \quad \text{dvs då} \quad h \to 0.$$

$\therefore D \ln x = \dfrac{1}{x}.$

(b) Vi ser direkt att $y(x) = 0$ är en lösning men det är inte den vi söker eftersom $y(x) \to 1$ då $x \to \infty$. Efter division med $y \neq 0$ och omskrivning ser vi att detta är en separabel differentialekvation:

$$\begin{aligned}
y' = \frac{y}{x(1+x)} &\Leftrightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{1}{x(1+x)} \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \ln|y| = \int \frac{1}{x(1+x)}dx = \int \frac{1+x-x}{x(1+x)}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)dx \\
&= \ln|x| - \ln|1+x| + C_1 \underset{x>0}{=} \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + C_1 \\
&\Leftrightarrow |y| = e^{\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)+C_1} = e^{C_1}\frac{x}{1+x} \\
&\Leftrightarrow y = \pm e^{C_1}\frac{x}{1+x} = \frac{C_2 x}{1+x}
\end{aligned}$$

där konstanten $C_2 = \pm e^{C_1}$ är godtycklig men $\neq 0$. Den allmänna lösningen ges därför av

$$y(x) = \frac{Cx}{1+x}$$

där C är en godtycklig konstant och $C = 0$ motsvarar triviala lösningen $y(x) = 0$. Vi får nu

$$y(x) = \frac{Cx}{1+x} = \frac{C}{\frac{1}{x}+1} \to \frac{C}{0+1} = C = 1 \text{ då } x \to \infty$$

och den sökta lösningen är

$$y(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Anm: Ekvationen är också linjär:

$$y' - \frac{1}{x(1+x)}y = 0.$$

Det betyder att vi kan använda standarmetoden och multiplicera ekvationen med den integrerande faktorn:

$$e^{G(x)} = e^{\int -\frac{1}{x(1+x)}dx} = e^{\int\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right)dx} = e^{\ln|1+x|-\ln|x|} = e^{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)} = \frac{1+x}{x}$$

vilket förstås ger samma allmänna lösning som ovan:

$$y'\frac{1+x}{x} + y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = D\left(y\frac{1+x}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow y\frac{1+x}{x} = C \Leftrightarrow y(x) = \frac{Cx}{1+x}.$$

5. (a) Integralen är generaliserad i $x = 0$. Utnyttjar vi att e^{-x} är strängt avtagande och att $x > 0$ får vi

$$0 \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e^0}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

och eftersom $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent omm $\alpha < 1$ (dvs. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{x^{1/2}}dx$ är konvergent) kan vi dra slutsatsen att den sökta integralen är konvergent.

Anm: En primitiv funktion till integranden kan inte uttryckas med elementära funktioner så det är inte lönt att försöka visa konvergensen genom att beräkna integralen med insättningsformeln.

(b) Med $f(x) = e^{-x}$ ger Maclaurins formel för $n = 2$:

$$e^{-x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(\xi)x^3}{3!} = \underbrace{1 - x + \frac{x^2}{2}}_{p_2(x)} + \underbrace{\frac{-e^{-\xi}x^3}{3!}}_{R_2(x)}$$

där ξ är ett tal mellan 0 och x. Vi får därför

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/4} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx &\approx \int_0^{1/4} \frac{p_2(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{1/4} \frac{1 - x + \frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}}dx \quad \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0 \\ \Rightarrow dx = 2tdt \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \end{array}\right] \\
&= \int_0^{1/2} \frac{1 - t^2 + \frac{t^4}{2}}{t}2tdt = \int_0^{1/2}(2 - 2t^2 + t^4)dx = \left[2t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{160} = \frac{480 - 40 + 3}{480} = \frac{443}{480} \quad (\approx 0.923)
\end{aligned}$$

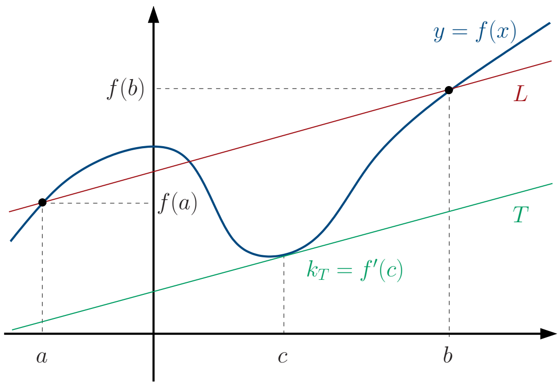
(c) Storleken av felet i approximationen i (b) ges av

$$\left|\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{R_2(x)}{\sqrt{x}}dx\right| = \left|\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\frac{-e^{-\xi}x^3}{3!}}{\sqrt{x}}dx\right| \le \frac{e^0}{3!}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3!}\int_0^{\frac{1}{2}} t^6 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^7}{7}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^7\cdot 3\cdot 7}$$
$$= \frac{1}{128\cdot 21} < \frac{1}{100\cdot 20} = \frac{1}{2000} = 0.5\cdot 10^{-3}$$

där vi utnyttjade samma variabelsubstitution som i (b).

6. (a) Medelvärdessatsen: *Om f är kontinuerlig i $[a,b]$ och deriverbar i $]a,b[$ så finns det ett $c \in]a,b[$ sådant att $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Om förutsättningarna i satsen är uppfyllda säger den att det finns (minst) ett c mellan a och b sådant att riktningskoefficienten $k_L = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ för linjen L genom $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$ är lika med riktningskoefficienten $k_T = f'(c)$ för tangenten T till kurvan $y = f(x)$ i punkten $x = c$ dvs. de båda linjerna är parallella.



Figur 2: Grafisk tolkning av Medelvärdessatsen.

(b) Kallar vi brädans styvhet för s så gäller enligt Sara sambandet $s = kl^3b$ där k är en proportionalitetskonstant, l tvärsnittets längd och b dess bredd. Eftersom $b = \sqrt{d^2-l^2}$, där d är stockens minsta diameter, beskriver funktionen

$$s(l) = k\sqrt{d^2-l^2}\,l^3,\ 0 \le l \le d,$$

brädans styvhet. Eftersom $s(l)$ är en kontinuerlig funktion och intervallet $I = [0,d]$ slutet och begränsat (kompakt) antar $s(l)$ sitt största och minsta värde i I. Eftersom också derivatan

$$s'(l) = k\left(\frac{-2l}{2\sqrt{d^2-l^2}}l^3 + \sqrt{d^2-l^2}\,3l^2\right) = k\left(\frac{-l^4+\left(d^2-l^2\right)3l^2}{\sqrt{d^2-l^2}}\right) = kl^2\frac{3d^2-4l^2}{\sqrt{d^2-l^2}}$$

existerar för alla $l \in]0,d[$ antar $s(l)$ sitt största respektive minsta värde antingen i någon av intervallets ändpunkter eller i en inre punkt där derivatan är noll:

$$s'(l) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ eller } 3d^2-4l^2 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{\sqrt{3}d}{2}.$$

(Nollstället $l = -\frac{\sqrt{3}d}{2}$ ligger utanför funktionens definitionsmängd.) Vi har nu

$$S(0) = 0, \qquad S(d) = 0, \qquad S(\frac{\sqrt{3}d}{2}) = k\sqrt{d^2-\left(\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)^3 > 0.$$

Styvheten antar alltså sitt största värde för $l = \frac{\sqrt{3}d}{2}$. Förhållandet mellan tvärsnittets längd och bredd blir då

$$\frac{l}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}d}{2}}{\sqrt{d^2-\left(\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)^2}} = \sqrt{3}.$$

Anm: Styvhetens största värde är alltså $s_{\max} = \frac{3\sqrt{3}kd^4}{16}$.