Ex 6

Visa att

$$e^x \geq 1 + x \text{ för alla } x.$$

Metod: Sätt $f(x) = e^x - 1 - x$ och visa att $f(x) \geq 0$ för alla x.

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \iff x = 0$$

Teckenstudium:

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$

$\therefore$ $f(x)$ antar sitt minsta värde $f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$ i $x = 0$

dvs $f(x) \geq 0$ för alla x.

Ex 7 Rita kurvan

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}.$$

Stationära punkter:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{3x^4 - 9x^2 - 2x^4}{(x^2-3)^2} = \frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{x^2(x+3)(x-3)}{((x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}))^2} = 0 \iff x = 0 \text{ eller } x = \pm 3$$

Teckenstudium:

x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$
		lok. max				terasspunkt				lok. min	

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3)^2-3} = \frac{-27}{9-3} = -\frac{9}{2}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(3) = \frac{3^3}{3^2-3} = \frac{9}{2}$$

Ex 7 (forts)

Asymptoter:

1) Lodräta?

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-3} \quad \begin{matrix} \leftarrow T(x) \\ \leftarrow N(x) \end{matrix} \Bigg\} \text{ Rationell funktion}$$

$N(\pm\sqrt{3}) = 0$, $T(\pm\sqrt{3}) \neq 0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ har de lodräta asymptoterna $x = \pm\sqrt{3}$

Kontroll:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-3} \longrightarrow \begin{cases} \pm\infty & \text{då } x \to +\sqrt{3}^{\pm} \\ \pm\infty & \text{då } x \to -\sqrt{3}^{\pm} \end{cases}$$

Ex 7 (forts)

2) Sneda?

Finns vågrät?

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-3} = \frac{x}{1-\frac{3}{x^2}} \to \pm\infty \quad \text{då } x \to \pm\infty.$$

$\frac{3}{x^2} \to 0$

$\therefore$ $y = f(x)$ saknar vågrät asymptot

Finns sned?

$$k: \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x(x^2-3)} = \frac{x^3}{x^3-3x} = \frac{1}{1-\frac{3}{x^2}} \to \frac{1}{1-0} = 1 \quad \text{då } x \to \pm\infty$$

$\frac{3}{x^2} \to 0$

$$m: f(x) - kx = \frac{x^3}{x^2-3} - 1 \cdot x = \frac{x^3 - x(x^2-3)}{x^2-3} = \frac{3x}{x^2-3} = \frac{3}{x - \frac{3}{x}} \to 0$$

$x \to \pm\infty$, $\frac{3}{x} \to 0$

då $x \to \pm\infty$

$\therefore$ $y = f(x)$ har den sneda asymptoten

$y = x$ då $x \to \pm\infty$.

Ex 7 (forts)

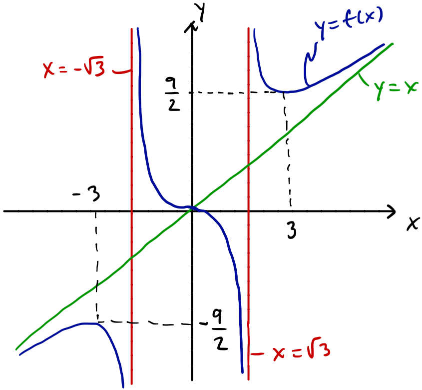
Alt: Polynomdivision

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2-3 & x^3 \\ & -(x^3-3x) \\ \hline & 3x \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 = x(x^2-3) + 3x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2-3} = x + \frac{3x}{x^2-3}$$

↑ sned asymptot

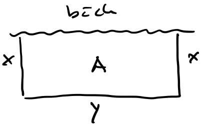


Sammanfattning:

$f(x)$ har en lokal maximipunkt i $x=-3$ med värdet $f(-3) = -\frac{9}{2}$, en lokal minimipunkt i $x=3$ med värdet $f(3) = \frac{9}{2}$ samt en terasspunkt i $x=0$ med värdet $f(0)=0$.

Kurvan $y=f(x)$ har de lodräta asymptoterna $x = \pm\sqrt{3}$ samt den sneda asymptoten $y=x$ då $x \to \pm\infty$.

Ex 9



$$x + x + y = 100 \Leftrightarrow y = 100 - 2x$$

$$A(x) = x \cdot y = x(100-2x), \quad \underbrace{0 \leq x \leq 50}_{I}$$

Kompakt intervall (slutet och begr.)

Stationära punkter:

$$A(x) = x(100-2x) = 100x - 2x^2 \Rightarrow A'(x) = 100 - 4x = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 25}$$

$A(x)$ är deriverbar ($\Rightarrow$ kontinuerlig) och I är kompakt

$\Rightarrow$ $A(x)$ antar största och minsta värde i I i någon av punkterna

$x = 0$, $x = 25$ eller $x = 50$

$$A(0) = 0$$

$$A(25) = 100 \cdot 25 - 2 \cdot 25^2 = 1250$$

$$A(50) = 0$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{A_{max} = 1250 \text{ m}^2}}$$

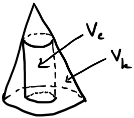
Alt: Teckenstudium:

		25	
$A'(x)$	$+$	0	$-$
$A(x)$	$\nearrow$	$A(25)$	$\searrow$

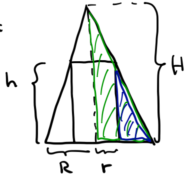
$\uparrow$

lok. max

Ex 10



Vi söker $\left(\dfrac{V_c}{V_k}\right)_{max}$



$V_c = \pi r^2 h$

$V_k = \dfrac{\pi R^2 H}{3}$

Likformiga trianglar:

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R} \Leftrightarrow h = \frac{H(R-r)}{R}$$

Sätt $f(r) = \dfrac{V_c}{V_k} = \dfrac{\pi r^2 h}{\frac{\pi R^2 H}{3}} = \dfrac{3r^2h}{R^2H}$

$$= \frac{3r^2H(R-r)}{R^3H} = \frac{3r^2(R-r)}{R^3}, \quad \underbrace{0 \le r \le R}_{I} \leftarrow \text{kompakt intervall}$$

$$f'(r) = \frac{6r(R-r)+3r^2\cdot(-1)}{R^3} = \frac{6rR-9r^2}{R^3} = \frac{3r(2R-3r)}{R^3} \Leftrightarrow r=0 \text{ eller } r=\frac{2R}{3}$$

$f(r)$ är deriverbar ($\Rightarrow$ kontinuerlig), I kompakt $\Rightarrow$ $f(r)$ antar största och minsta värde i I i någon av punkterna $r=0$, $r=\frac{2R}{3}$ eller $r=R$

$$f(0)=0, \quad f\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{3\left(\frac{2R}{3}\right)^2\left(R-\frac{2R}{3}\right)}{R^3} = \frac{3\,\frac{4R^2}{9}\cdot\frac{R}{3}}{R^3} = \frac{4}{9}, \quad f(R)=0$$

$\therefore$ Cylindern kan maximalt uppta $\frac{4}{9}$ av konens volym (knappt 45%)