MA2001 Envariabelanalys

Något om derivator del 1

Mikael Hindgren

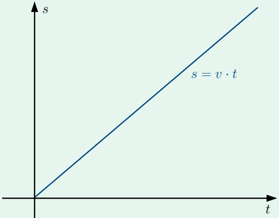
HÖGSKOLAN I HALMSTAD

6 november 2024

Derivatans definition

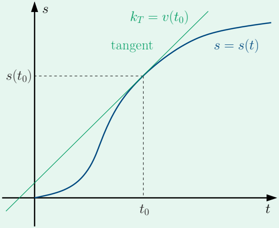
Exempel 1

s-t-graf för ett föremål i rörelse. $s(0) = 0$.



Hastigheten konstant:

Rät linje där riktningskoefficienten
= hastigheten v



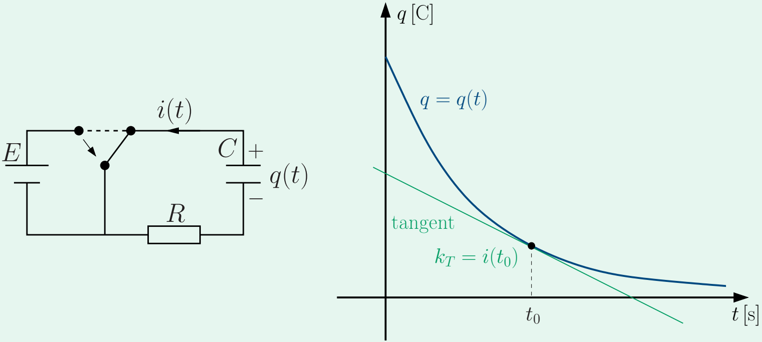
Hastigheten ej konstant:

$v(t_0) =$ lutningen på kurvan $s = s(t)$ vid tiden t_0
$=$ riktningskoefficienten för tangenten till kurvan vid tiden t_0

Derivatans definition

Exempel 2

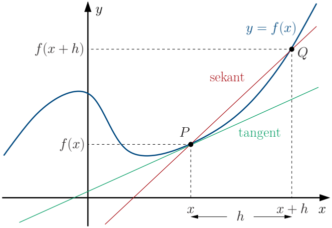
Urladdning av kondensator:



Urladdningsströmmen $i(t_0)$ i kretsen vid tiden t_0
= riktningskoefficienten för tangenten till kurvan $q = q(t)$ i punkten t_0.

Derivatans definition

Vi får ett mått på hur snabbt en funktion $f(x)$ ändras i en punkt P genom att bestämma riktningskoefficienten för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i P.



- Metod: Drag en sekant genom P och Q.
- Approx: $k_{\text{tangent}} \approx k_{\text{sekant}} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Sekanten närmar sig tangenten då Q närmar sig $P \Leftrightarrow h \to 0$

Definition 1 (Derivata)

Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar så är $f(x)$ deriverbar i x. Gränsvärdet kallas derivatan av f i x.

Beteckningar: $f'(x)$, $Df(x)$, $\dfrac{df}{dx}$

Derivatans definition

Exempel 3

Bestäm derivatan av $f(x) = x^2$ i en godtycklig punkt x.

Lösning:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \to 2x \text{ då } h \to 0 \\
\therefore f'(x) &= 2x
\end{aligned}$$

Definition 2 (Tangent)

Tangenten till $y = f(x)$ i $x = x_0 =$ Den räta linje genom $(x_0, f(x_0))$ som har riktningskoefficienten $f'(x_0)$.

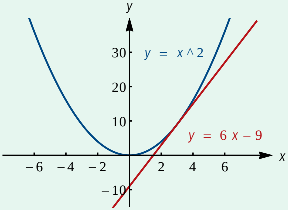
Derivatans definition

Exempel 4

Bestäm tangenten till kurvan $y = f(x) = x^2$ i punkten $x = 3$.

Lösning:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \\ \Rightarrow k_{\text{tangent}} &= f'(3) = 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$



Tangentens ekvation:

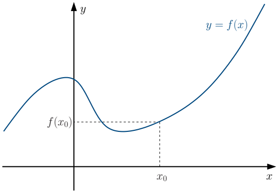
$$\begin{aligned} y &= kx + m \Leftrightarrow m = y - kx \\ &= f(3) - f'(3) \cdot 3 = 9 - 6 \cdot 3 = -9 \\ \therefore y &= 6x - 9 \end{aligned}$$

Exempel 5

Bestäm a) De^x b) $D \ln x$ c) $D \sin x$

Deriverbarhet och kontinuitet

HÖGSKOLAN I HALMSTAD



Är varje deriverbar funktion kontinuerlig?

$$f(x) \text{ kontinuerlig i } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \to f(x_0) \text{ då } x \to x_0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x) - f(x_0) \to 0 \text{ då } x \to x_0$$

Sätt $h = x - x_0$, $x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \quad = \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$
$$\to \quad f'(x_0) \cdot 0 = 0 \text{ då } h \to 0$$

Sats 1

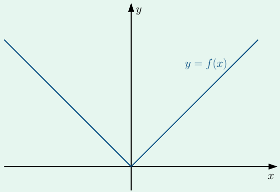
$f(x)$ deriverbar i $x_0 \Rightarrow f(x)$ kontinuerlig i x_0

Deriverbarhet och kontinuitet

Är varje kontinuerlig funktion deriverbar?

Exempel 6

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



f är kontinuerlig i punkten $x = 0$. Är f deriverbar i $x = 0$?

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} \to \begin{cases} 1 \text{ om } h \to 0^+ \\ -1 \text{ om } h \to 0^- \end{cases}$$

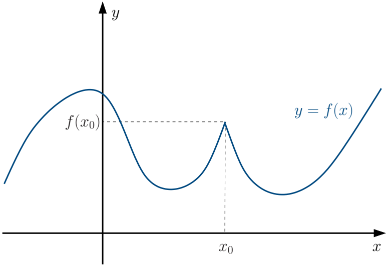
$\therefore$ Gränsvärdet existerar inte och $f(x)$ är inte deriverbar i $x = 0$.

Deriverbarhet och kontinuitet

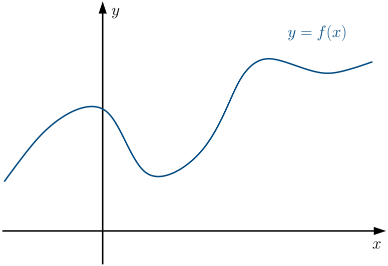
HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Minnesregel:

- f kontinuerlig i $\Rightarrow$ kurvan $y = f(x)$ "hänger ihop"
- f deriverbar i $\Rightarrow$ kurvan $y = f(x)$ "hänger ihop och är mjuk”



f kontinuerlig, ej deriverbar i x_0



f deriverbar och kontinuerlig

Produktregeln

Exempel 7

Bestäm $D(e^x \sin x)$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}\sin(x+h)-e^x\sin x}{h} = \text{... Jobbigt!}$$

Vi behöver en regel för $D(f \cdot g)$!

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
= \quad & \frac{f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
= \quad & \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
\to \quad & f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \text{ då } h \to 0
\end{aligned}$$

Produktregeln

$$D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Produktregeln

Anm: $g(x) = k =$ konstant $\Rightarrow D(k \cdot f(x)) = 0 \cdot f(x) + k \cdot f'(x) = kf'(x)$

Exempel 7 (forts)

$$D(\underset{f}{e^x}\underset{g}{\sin x}) = \underset{f'}{e^x}\underset{g}{\sin x} + \underset{f}{e^x}\underset{g'}{\cos x} = e^x(\sin x + \cos x)$$

Kedjeregeln

Exempel 8

Bestäm De^{x^2} $\leftarrow$ sammansatt funktion: $f(g) = e^g$, $g(x) = x^2$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{(x+h)^2} - e^{x^2}}{h} = \text{... Jobbigt!}$$

Vi behöver en regel för $Df(g(x))$!

Sätt: $\Delta g = g(x+h) - g(x)$, $h \to 0 \Leftrightarrow \Delta g \to 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{h} \underset{\text{Om } \Delta g \neq 0}{=} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{h}$$

$$= \quad \underbrace{\frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g}}_{\to f'(g)} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\to g'(x)} \to f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ då } h \to 0$$

Kedjeregeln

$Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $\leftarrow$ Inre derivatan

Kedjeregeln

Anm: Det finns ”elaka” funktioner som t ex $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ för vilka $\Delta g = g(x+h) - g(x) = 0$ för godtyckligt små h men beviset ovan kan modifieras så att kedjeregeln gäller även för dessa funktioner.

Exempel 8 (forts)

$De^{x^2} = ?$

Lösning:

$$\left.\begin{aligned} f(g) &= e^g \Rightarrow f'(g) = e^g = e^{x^2} \\ g(x) &= x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow De^{x^2} = f'(g)\cdot g'(x) = e^{x^2}\cdot 2x$$

Exempel 9

Bestäm a) $D\cos x$ b) Dx^{α} c) Da^x d) $D\frac{1}{x}$

Kvotregeln

Exempel 10

Bestäm $D\tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{h} = \text{... Jobbigt!}$$

Vi behöver en regel för $D\left(\frac{f}{g}\right)$!

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \underset{\text{Produktregeln}}{\Rightarrow} D\left(\frac{f}{g}\right) = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot D\left(\frac{1}{g}\right) \underset{\text{Kedjeregeln}}{=} f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot (-\frac{1}{g^2} g')$$

Kvotregeln

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Kvotregeln

Exempel 10 (forts)

Kvotregeln ger nu:

$$D\tan x = D\Big(\frac{\overset{f}{\sin x}}{\underset{g}{\cos x}}\Big) = \frac{\overset{f'}{\cos x}\,\overset{g}{\cos x} - \overset{f}{\sin x}\,(\overset{g'}{-\sin x})}{\underset{g^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\[2ex] \dfrac{\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

Sammanfattning av deriveringsreglerna

- $D(f+g) = f' + g'$
- $D(f \cdot g) = f'g + fg'$
- $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- $Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

Exempel 11

Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 + 2}$.

Lösning:

$$\text{Kvotregeln:} \quad f'(x) = \frac{\overbrace{(3x^2-2)(x^2+2)}^{f'\cdot g} - \overbrace{(x^3-2x)\cdot 2x}^{f\cdot g'}}{\underbrace{(x^2+2)^2}_{g^2}}$$

$$= \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^2 - 4 - (2x^4 - 4x^2)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 8x^2 - 4}{(x^2+2)^2}.$$

Sammanfattning av deriveringsreglerna

Exempel 12

Bestäm $h'(x)$ om $h(x) = x^2 e^{\sin x}$.

Lösning:

Produktregeln och kedjeregeln:

$$h'(x) = \overbrace{2xe^{\sin x}}^{f' \cdot g} + \overbrace{x^2 D(e^{\sin x})}^{f \cdot g'}$$

$$\left.\begin{aligned} f(g) = e^g \Rightarrow f'(g) = e^g = e^{\sin x} \\ g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x \end{aligned}\right\} \Rightarrow De^{\sin x} = f'(g) \cdot g'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow h'(x) = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \cos x = xe^{\sin x}(2 + x\cos x).$$

Sammanfattning av deriveringsreglerna

Exempel 13

Bestäm $h'(x)$ om $h(x) = \dfrac{2xe^{-x^2}}{x^2-1}$.

Lösning:

Kvotregeln:
$$h'(x) = \frac{\overset{f'\cdot g}{D(2xe^{-x^2})(x^2-1)} - \overset{f\cdot g'}{2xe^{-x^2}\cdot 2x}}{\underset{g^2}{(x^2-1)^2}}$$

Produktregeln:
$$D(2xe^{-x^2}) = \overset{f'\cdot g}{2e^{-x^2}} + \overset{f\cdot g'}{2xD(e^{-x^2})}$$

Kedjeregeln:
$$D(e^{-x^2}) = \underset{f'(g)}{e^{-x^2}} \cdot \underset{g'(x)}{(-2x)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h'(x) &= \frac{(2e^{-x^2} + 2xe^{-x^2}(-2x))(x^2-1) - 2xe^{-x^2}\cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{2e^{-x^2}(-2x^4+x^2-1)}{(x^2-1)^2}.
\end{aligned}$$

Implicit derivering

Exempel 14

Bestäm ekvationen för tangenten i punkten $(1, -1)$ till kurvan

$$x^3 - y^3 - xy - x = 2$$

- Att först lösa ut y som funktion av x är jobbigt så det gör vi inte!
- Vi konstaterar att $(1, -1)$ faktiskt ligger på kurvan:

$$1^3 - (-1)^3 - 1 \cdot (-1) - 1 = 2 \quad \text{Ok!}$$

- Vi kan betrakta y som en funktion av x och derivera båda sidor med avseende på x:

$$\begin{aligned} 3x^2 - \underbrace{3y^2 \cdot y'}_{\text{kedjeregeln}} - \underbrace{(1 \cdot y + x \cdot y')}_{\text{produktregeln}} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - y - 1 &= (3y^2 + x)y' \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{3x^2 - y - 1}{3y^2 + x}. \end{aligned}$$

Implicit derivering

Exempel 14 (forts)

- Riktningskoefficienten för tangenten i punkten $(x, y) = (1, -1)$ är $y'(1)$:

$$y'(x) = \frac{3x^2 - y - 1}{3y^2 + x} \Rightarrow y'(1) = \frac{3 \cdot 1^2 - (-1) - 1}{3(-1)^2 + 1} = \frac{3}{4}$$

- Tangenten går genom $(1, -1)$:

$$y \quad = \quad kx + m \Leftrightarrow -1 = \frac{3}{4} \cdot 1 + m \Leftrightarrow m = -\frac{7}{4}$$

$\therefore$ Tangentens ekvation är $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.

- Implicit derivering innebär alltså att derivera en funktion som är *implicit* definierad av en ekvation dvs funktionen inte är given *explicit* som t ex $y(x) = 2x^2 - 3\sin x$.
- Ekvationen definierar en kurva som i de flesta punkter har en lutning som ges av y'.

Derivator i Mathematica

Derivator i Mathematica (Ex 11b):

```
In[41]:= D[x^2*Exp[Sin[x]], x]
         FullSimplify[%]
```

Out[41]= $2\, e^{\mathrm{Sin}[x]}\, x + e^{\mathrm{Sin}[x]}\, x^2\, \mathrm{Cos}[x]$

Out[42]= $e^{\mathrm{Sin}[x]}\, x\, (2 + x\, \mathrm{Cos}[x])$

Implicit derivering (Ex 12):

```
In[38]:= ekv = x^3 - y[x]^3 - x*y[x] - x == 2
         sol = Solve[D[ekv, x], y'[x]]
         sol /. {x → 1, y[x] → -1}
```

Out[38]= $-x + x^3 - x\, y[x] - y[x]^3 == 2$

Out[39]= $\left\{\left\{y'[x] \to \dfrac{-1 + 3x^2 - y[x]}{x + 3\, y[x]^2}\right\}\right\}$

Out[40]= $\left\{\left\{y'[1] \to \dfrac{3}{4}\right\}\right\}$