MA2001 Envariabelanalys

Något om generaliserade integraler

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

27 november 2024

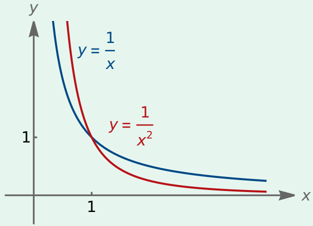
Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 1

Undersök

$$\int_1^R \frac{1}{x^2}dx \quad \text{och} \quad \int_1^R \frac{1}{x}dx \quad \text{då} \quad R \to \infty.$$



$$\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = -\frac{1}{R} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{R} \to 1 \text{ då } R \to \infty$$

$$\int_1^R \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_1^R = \ln R - \ln 1 = \ln R \to \infty \text{ då } R \to \infty$$

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Definition 1

Om funktionen f är integrerbar på $[a, R]$ för alla $R \geq a$ och om gränsvärdet

$$\lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)dx = A$$

existerar ändligt så är den generaliserade integralen

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

konvergent med värdet A. I annat fall är den divergent.

I exemplet ovan:

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ är konvergent
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ är divergent

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 2

Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx$$

är konvergent.

Lösning:

$$\begin{aligned} \int_1^R e^{-x} dx &= \left[-e^{-x}\right]_1^R = -e^{-R} - \left(-e^{-1}\right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^R} \to \frac{1}{e} \text{ då } R \to \infty \\ &\Leftrightarrow \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_1^{\infty} e^{-x} dx \quad \text{är konvergent.}$$

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 3

Undersök konvergensen hos

$$\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^R \frac{\overset{f'(x)}{2x}}{\underset{f(x)}{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln\left|1+x^2\right|\Big]_1^R = \frac{1}{2}\big(\ln\left(1+R^2\right)-\ln 2\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\ln\left(1+R^2\right)-\ln 2\big) \to \infty \text{ då } R\to\infty\end{aligned}$$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx \quad \text{är divergent.}$$

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 4

Undersök konvergensen hos

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$$

Lösning:

$$\int_0^R \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^R = 1 - \cos R \to \quad ?$$

$\cos R$ saknar gränsvärde då $R \to \infty$!

$$\therefore \int_0^{\infty} \sin x \, dx \quad \text{är divergent.}$$

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 5

För vilka värden på α är den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \quad \text{konvergent?}$$

Lösning:

Enligt Ex 1 är den divergent om $\alpha = 1$. För $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^R \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx &= \int_1^R x^{-\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_1^R \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(-R^{-\alpha+1}+1\right) \to \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha > 1. \\ \infty & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Sats 1

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \text{ är konvergent } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

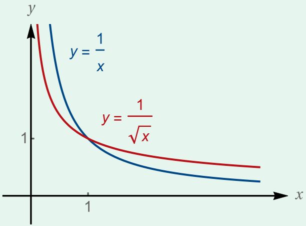
Generaliserade integraler

Obegränsad integrand

Exempel 6

Undersök

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{och} \quad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{då} \quad \varepsilon \to 0^+.$$



Båda integranderna $\to \infty$ då $x \to 0^+$ dvs de är obegränsade för $0 < x \leq 1$.
Borde då inte integralerna bli oändligt stora?

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_{\varepsilon}^{1} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2 \text{ då } \varepsilon \to 0^+$$

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{\varepsilon}^{1} = \ln 1 - \ln\varepsilon = -\ln\varepsilon \to \infty \text{ då } \varepsilon \to 0^+$$

Generaliserade integraler

Obegränsad integrand

Definition 2

Om funktionen f är integrerbar över intervallet $[a+\varepsilon, b]$ för varje $\varepsilon > 0$ men obegränsad i intervallet $a < x \leq b$ och om gränsvärdet

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = A$$

existerar så är den generaliserade integralen $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ konvergent med värdet A. I annat fall är den divergent.

Anm: Om $f(x)$ inte är definierad i $x = a$ så säger man att integralen $\int_a^b f(x)dx$ är generaliserad i punkten a. I Ex 6:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ är konvergent
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ är divergent

och båda är generaliserade i $x = 0$.

Generaliserade integraler

Obegränsad integrand

Exempel 7

Avgör om

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

är konvergent.

Lösning:

Integralen är generaliserad i $x = 0$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \ln x \, dx &= [x \ln x - x]_\varepsilon^1 = 1 \cdot \ln 1 - 1 - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) \\ &= -1 - \underbrace{\varepsilon \ln \varepsilon}_{\to 0 \text{ då } \varepsilon \to 0^+} + \varepsilon \to -1 \text{ då } \varepsilon \to 0^+. \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^1 \ln x \, dx = -1 \quad \text{dvs konvergent.}$$

Generaliserade integraler

Obegränsad integrand

Exempel 8

För vilka värden på α är den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \quad \text{konvergent?}$$

Lösning:

Enligt Ex 6 är den divergent om $\alpha = 1$. För $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx &= \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{-\alpha+1}\right) \to \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{då } \varepsilon \to 0^+ \text{ om } \alpha < 1. \\ \infty & \text{då } \varepsilon \to 0^+ \text{ om } \alpha > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Sats 2

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \textit{ är konvergent } \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

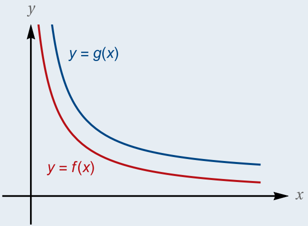
Generaliserade integraler

Jämförelsekriterier för generaliserade integraler med positiv integrand

Sats 3

Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *för alla x i integrationsintervallet I så gäller*

- $\int_I g(x)dx$ *konvergent* $\Rightarrow \int_I f(x)dx$ *konvergent*
- $\int_I f(x)dx$ *divergent* $\Rightarrow \int_I g(x)dx$ *divergent*



Generaliserade integraler

Jämförelsekriterier för generaliserade integraler med positiv integrand

Exempel 9

Undersök konvergensen hos $\displaystyle\int_1^\infty \frac{5x-4}{x^3+x}\,dx$.

Lösning:

$$\int_1^R \frac{5x-4}{x^3+x}\,dx = \ldots \quad \text{Jobbigt!}$$

Vi behöver inte beräkna integralen! För $x \geq 1$ är

$$0 \leq \frac{5x-4}{x^3+x} \leq \frac{5x}{x^3+x} \leq \frac{5x}{x^3} = \frac{5}{x^2}$$

$$\text{Sats 1} \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty \frac{5}{x^2}\,dx \quad \text{konvergent}$$

$$\text{Sats 3} \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty \frac{5x-4}{x^3+x}\,dx \quad \text{konvergent}$$

Generaliserade integraler

Jämförelsekriterier för generaliserade integraler med positiv integrand

Exempel 10

Undersök konvergensen hos $\displaystyle\int_1^5 \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}\,dx$.

Lösning:

Integralen är generaliserad i $x=1$. För $x \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2+3x+2}{x^2-1} &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} \geq \frac{2}{x-1} \\
\int_{1+\varepsilon}^5 \frac{2}{x-1}\,dx &= 2\int_{1+\varepsilon}^5 \frac{dx}{x-1} = 2\left[\ln(x-1)\right]_{1+\varepsilon}^5 \\
&= 2\left(\ln(5-1)-\ln(1+\varepsilon-1)\right) \\
&= 2\ln 4 - 2\ln\varepsilon \to \infty \text{ då } \varepsilon \to 0
\end{aligned}
$$

Sats 3: $\displaystyle\int_1^5 \frac{2}{x-1}\,dx$ divergent $\Rightarrow \displaystyle\int_1^5 \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}\,dx$ divergent

Generaliserade integraler

Jämförelsekriterier för generaliserade integraler med positiv integrand

Exempel 11

Avgör om $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ är konvergent.

Lösning:

För $x \geq 2$ är

$$0 \leq \frac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x\sqrt{x^2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x^2}$$

$$\text{Sats 1} \quad \Rightarrow \quad \int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{konvergent}$$

$$\text{Sats 3} \quad \Rightarrow \quad \int_2^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx \quad \text{konvergent}$$

Anm: Integranden $\dfrac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+1}}$ saknar elementär primitiv funktion dvs en som kan uttryckas med elementära funktioner.

Generaliserade integraler

Integraler som är generaliserade på fler än ett sätt

Exempel 12

Avgör om $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent.

Lösning:

Integralen är generaliserad på två sätt:
Obegränsat intervall och obegränsad integrand (generaliserad i $x = 0$).
Dela upp integralen så att varje delintegral är generaliserad på endast ett sätt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx}_{A} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx}_{B} \quad \leftarrow \text{ en möjlig uppdelning}$$

Integralen är konvergent om A och B båda är konvergenta. $\leftarrow$ Definition
Enligt Sats 1 & 2 är B konvergent men A är divergent.

$$\therefore \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{är divergent}$$

Generaliserade integraler

Integraler som är generaliserade på fler än ett sätt

Anm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x^3 dx = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{(-R)^4}{4}\right) = 0$$

Integralen är alltså konvergent. Eller?

NEJ!!! $$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx = \int_{-\infty}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{\infty} x^3 dx$$

Båda delintegralerna är divergenta!

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx \text{ är divergent!}$$

Varning!

Enligt definitionen måste alltid uppdelning göras så att varje delintegral är generaliserad på endast ett sätt!

Generaliserade integraler

Integraler som är generaliserade på fler än ett sätt

Exempel 13

Avgör om $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx$ är konvergent.

Lösning:

Integralen är generaliserar på två sätt.
Dela upp den så att varje integral är generaliserad på endast ett sätt:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx}_{\text{generaliserad i } x=0} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx}_{\text{Obegränsat intervall}}$$

$$0 < x \leq 1: \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

$$\text{Sats 2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{1} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx \quad \text{konvergent}$$

$$\text{Sats 3} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx \quad \text{konvergent}$$

Generaliserade integraler

Integraler som är generaliserade på fler än ett sätt

Exempel 13 (forts.)

$$x \geq 1: \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\text{Sats 1} \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \quad \text{konvergent}$$

$$\text{Sats 3} \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx \quad \text{konvergent}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx \quad \text{är konvergent}$$

Generaliserade integraler

Uppgifter från tentor

Exempel 14 (Tentamen 120413, uppgift 1)

(a) Beräkna $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$. (3p)

Exempel 15 (Tentamen 170113, uppgift 5)

(a) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$. (2p)

Exempel 16 (Tentamen 210115, uppgift 5)

(a) Visa att den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}\,dx$ är konvergent utan att beräkna den. (2p)

(b) Beräkna den generaliserade integralen i (a). (3p)