MA2001/MA2049 Envariabelanalys

Något om gränsvärden

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

4 november 2024

Gränsvärden

Exempel 1

Hur beter sig följande funktioner då x är stort?

$$f(x) = \frac{3x+2}{x}, \qquad g(x) = \frac{\cos x}{x}, \qquad h(x) = x\cos x, \qquad p(x) = x^2$$

- $f(x) = \dfrac{3x+2}{x} = \dfrac{3+\frac{2}{x}}{1} \approx 3$ om x är stort.
- $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x} \Rightarrow g(x) = \dfrac{\cos x}{x} \approx 0$ då x är stort.
- $h(x) = x\cos x$ omväxlande positiva och negativa värden då x växer.
- $p(x) = x^2$ kan bli hur stor som helst.

Slutsats:

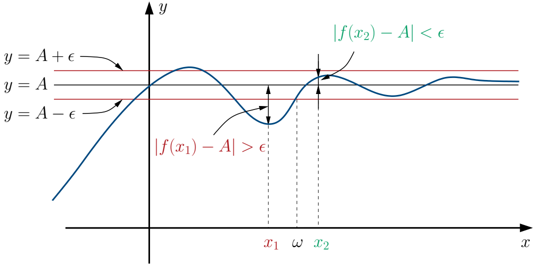
- $f(x)$ ligger godtyckligt nära 3 om x är tillräckligt stort.
- $g(x)$ ligger godtyckligt nära 0 om x är tillräckligt stort.
- $p(x)$ antar hur stora värden som helst.

Gränsvärden

Vad betyder "godtyckligt nära" och "tillräckligt stort"?

Definition 1

- $f(x)$ har gränsvärdet A då $x \to \infty$ om det till godtyckligt litet $\epsilon > 0$ finns ett ω sådant att
$$x > \omega \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$
- Vi skriver $f(x) \to A$ då $x \to \infty$ eller $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$



På motsvarande sätt definieras övriga gränsvärden: $f(x) \to A$ då $x \to a$, $f(x) \to \infty$ då $x \to a$, $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ (M. & N. s 165-167, 183-184).

Gränsvärden

Exempel 2

För $f(x) = \dfrac{3x+2}{x}$ har vi

$$|f(x) - A| = \left|\frac{3x+2}{x} - 3\right| = \left|\frac{2}{x}\right| = \frac{2}{x} < \epsilon \Leftrightarrow x > \frac{2}{\epsilon}$$

Med $\omega = \dfrac{2}{\epsilon}$ får vi att $x > \omega \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$ dvs $f(x) \to 3$ då $x \to \infty$.

Räkneregler för gränsvärden

Med definitionen kan man visa följande:

Sats 1

1. $\lim f = 0$, g *begr.* $\Rightarrow \lim(fg) = 0$
2. $\lim f = A$, $\lim g = B \Rightarrow \lim(f+g) = A + B$, $\lim(fg) = AB$, $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{A}{B}$
3. $\lim g(x) = a$, $f(x) \to A$ *då* $x \to a \Rightarrow \lim f(g(x)) = A$
4. $\lim f = \lim g = A, f < h < g \Rightarrow \lim h = A$ *(Instängningssatsen)*
5. $\lim f = A$, $\lim g = B$, $f \leq g \Rightarrow A \leq B$

Exempel 3

$$\frac{1}{x} \to 0 \text{ då } x \to \infty,\ -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \to 0 \text{ då } x \to \infty.$$

Exempel 4

$$f(x) = \cos x \to 1 \text{ då } x \to 0,\ g(x) = \frac{x^2+3}{x+1} \to 3 \text{ då } x \to 0$$
$$\Rightarrow f + g \to 1 + 3 = 4,\ f \cdot g \to 1 \cdot 3,\ \tfrac{f}{g} \to \tfrac{1}{3} \text{ då } x \to 0$$

Räkneregler för gränsvärden

Exempel 5

$$\frac{1}{x} \to 0 \text{ då } x \to \infty \Rightarrow 2^{1/x} \to 2^0 = 1 \text{ då } x \to \infty$$

Exempel 6

$$\underbrace{\frac{1}{x+2}}_{\to 0} < \frac{1}{x+1} < \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \Rightarrow \frac{1}{x+1} \to 0 \text{ då } x \to \infty \text{ enligt instängningssatsen.}$$

Exempel 7

Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 2x - 8}{x^3 + 5x^2 - 6}$

Exempel 8

Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 2x)$

Talet e

Studera talföljden $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2\\
a_2 &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25\\
a_3 &= \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 2.37\\
&\vdots\\
a_{100} &= \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2.7048\ldots\\
&\vdots\\
a_{1000000} &= \left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2.7182\ldots
\end{aligned}$$

Talet e

Sats 2 (Axiom)

Varje växande talföljd som är begränsad har ett gränsvärde.

Man kan visa att a_n är växande och att $2 \leq a_n < 3 \; \forall \, n \in \mathbb{Z}^+$
$\Rightarrow a_n$ har ett gränsvärde då $n \to \infty$.

Definition 2 (Talet e)

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}$$

Sats 3

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \; x \in \mathbb{R}$$

Exempel 9

Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$

Standardgränsvärden

Sats 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty, \ (a > 1) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \infty, \ (a > 1, \ \alpha > 0)$$

Minnesregel: ”log < pot < exp”

Exempel 10

Beräkna $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^{2x} - 2^{3x}}{x^{1000}}$

Exempel 11

Beräkna $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln 2x}{\ln 3x}$

Exempel 12

Beräkna $\lim_{x\to\infty} \dfrac{xe^{x^2+x}}{e^{x^2+2x}}$

Standardgränsvärden

Exempel 13

Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

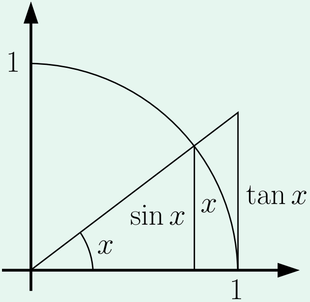
Lösning:

För $x \neq 0$ har vi

$$\sin x \le x \le \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\cos x}_{\to 1} \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$



$\therefore \frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0$ enligt instängningssatsen.

Standardgränsvärden

Exempel 14

Beräkna $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

Lösning:

Sätt $t = \dfrac{1}{x}$, $\quad x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to \infty$:

$$x \ln x = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{\ln 1 - \ln t}{t} = -\frac{\ln t}{t} \to 0 \text{ då } t \to \infty \text{ dvs då } x \to 0^+.$$

Exempel 15

Beräkna $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Lösning:

Sätt $t = \dfrac{1}{x}$, $\quad x \to 0 \Leftrightarrow t \to \pm\infty$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = t \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \to \ln e = 1 \text{ då } t \to \pm\infty \text{ dvs då } x \to 0.$$

Standardgränsvärden

Exempel 16

Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Lösning:

Sätt $t = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = 1 + t \Leftrightarrow x = \ln(1+t), \quad x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} \to \frac{1}{1} = 1 \text{ då } x \to 0.$$

Standardgränsvärden

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0, \ (a > 1, \ \alpha > 0) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty, \ (a > 1)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \infty, \ (a > 1, \ \alpha > 0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Standardgränsvärden

Exempel 17

Beräkna $\lim_{x \to 0} \dfrac{3 \sin x - \sin 2x}{\sin 3x}$

Exempel 18

Beräkna $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

Exempel 19

Beräkna $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{\ln(1 + 2x)}$

Exempel 20

Beräkna $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{\cos x} - 1}{\cos x}$

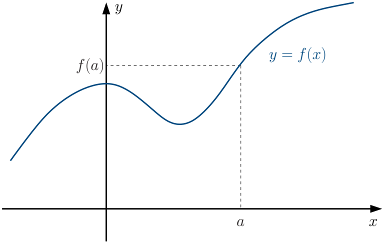
Exempel 21

Beräkna $\lim_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$

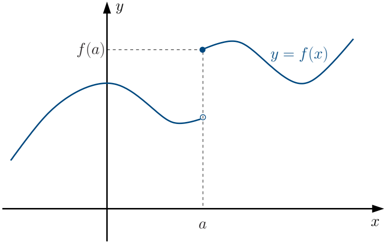
Kontinuitet

Definition 3

- $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = a$ omm $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$.
- $f(x)$ är kontinuerlig om $f(x)$ är kontinuerlig i alla punkter $x \in D_f$.



(a) $f(x)$ är kontinuerlig i a



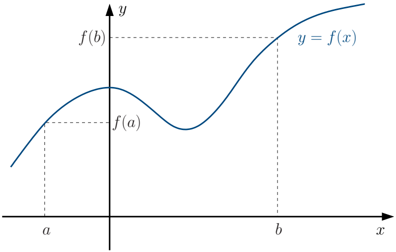
(b) $f(x)$ är ej kontinuerlig i a:
$f(x) \nrightarrow f(a)$ då $x \to a^-$

Anm: $f(x)$ är kontinuerlig i a om kurvan $y = f(x)$ "hänger ihop" i punkten $x = a$.

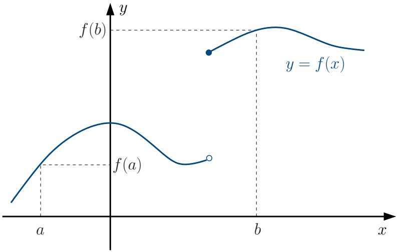
Viktiga egenskaper hos kontinuerliga funktioner

Sats 5 (Mellanliggande värden)

$f(x)$ kontinuerlig i $I = [a, b] \Rightarrow f(x)$ antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$ i I.



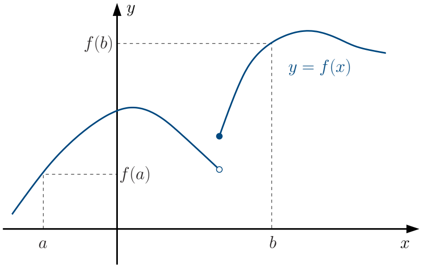
(a) $f(x)$ kontinuerlig och antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$



(b) $f(x)$ ej kontinuerlig. Antar ej alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

Kan vi sätta "$\Leftrightarrow$" i satsen om mellanliggande värden?

Viktiga egenskaper hos kontinuerliga funktioner



Nej! $f(x)$ ovan antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$ i $[a, b]$ men $f(x)$ är inte kontinuerlig i $[a, b]$.

Kontinuitet

Exempel 22

Har funktionen $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ ett nollställe mellan 0 och 1?

Lösning:

$f(x)$ är kontinuerlig i $[0, 1]$

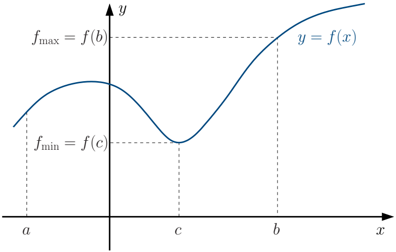
$\Rightarrow$ $f(x)$ antar alla värden mellan $f(0) = 2$ och $f(1) = -4$ i $[0, 1]$

$\Rightarrow$ Det finns ett $x_1 \in [0, 1]$ sådant att $f(x_1) = 0$.

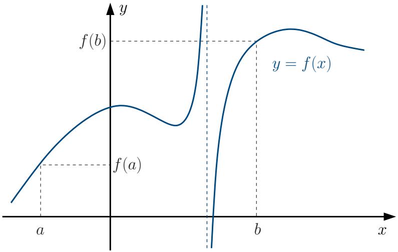
Viktiga egenskaper hos kontinuerliga funktioner

Sats 6 (Extremvärden)

$f(x)$ kontinuerlig i $I = [a, b] \Rightarrow f(x)$ antar ett största och ett minsta värde i I.



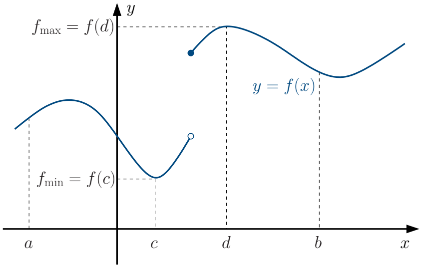
(a) $f(x)$ kontinuerlig i $I \Rightarrow f(x)$ antar största och minsta värde i I



(b) $f(x)$ ej kontinuerlig i I. $f(x)$ är ej begränsad i I och antar ej största och minsta värde i I.

Kan vi sätta "$\Leftrightarrow$" i satsen?

Viktiga egenskaper hos kontinuerliga funktioner

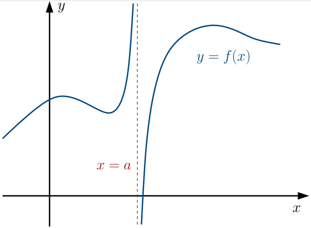


Nej! $f(x)$ ovan är begränsad och antar ett största och ett minsta värde i $[a, b]$ men $f(x)$ är inte kontinuerlig i $[a, b]$.

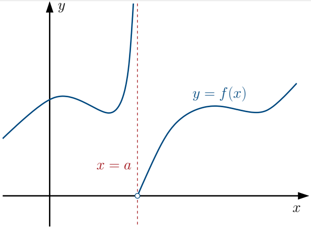
Asymptoter

Definition 4

Linjen $x = a$ är en lodrät asymptot till kurvan $y = f(x)$ om $f(x) \to +\infty$ eller $-\infty$ då $x \to a$.



(a) $f(x) \to +\infty$ då $x \to a^-$
$f(x) \to -\infty$ då $x \to a^+$



(b) $f(x) \to +\infty$ då $x \to a^-$
$f(x) \to 0$ då $x \to a^+$

Exempel 23

Har kurvan $y = f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ någon lodrät asymptot?

$$\frac{x}{x-2} \to \pm\infty \text{ då } x \to 2^\pm$$

$\therefore\ y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 2$.

Asymptoter

Exempel 24

Har kurvan $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ någon lodrät asymptot?

Finns det två lodräta asymptoter $x = 1$ och $x = -1$?

$$\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \to \pm\infty \text{ då } x \to 1^{\pm}$$

$\therefore\ y = f(x)$ har endast den lodräta asymptoten $x = 1$.

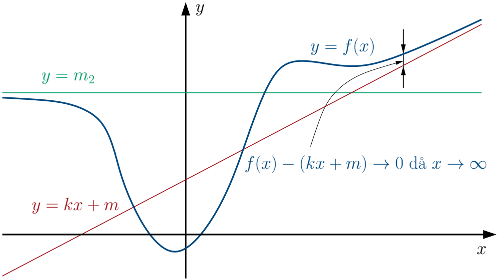
Anm: För rationella funktioner $f(x) = \dfrac{T(x)}{N(x)}$ gäller:

$$N(a) = 0,\ T(a) \neq 0 \Rightarrow x = a \text{ lodrät asymptot.}$$

Asymptoter

Definition 5

- Linjen $y = kx + m$ är en sned asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \infty$ om $f(x) - (kx + m) \to 0$ då $x \to \infty$.
- En sned asymptot med $k = 0$ kallas vågrät.
- Motsvarande gäller då $x \to -\infty$.



- $y = m_2$ är en vågrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \to -\infty$
- $y = kx + m$ är en sned asymptot till $y = f(x)$ då $x \to \infty$

Asymptoter

Om kurvan $y = f(x)$ har en sned asymptot då $x \to \infty$ har vi

$$\frac{f(x) - (kx + m)}{x} \to 0 \text{ då } x \to \infty$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - k - \underbrace{\frac{m}{x}}_{\to 0} \to 0 \text{ då } x \to \infty$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \to k \text{ då } x \to \infty$$

Enligt definitionen har vi också:

$$f(x) - kx \to m \text{ då } x \to \infty$$

Asymptoter

Bestämning av sneda asymptoter:

1. Om g.v $\lim_{x\to\infty} f(x) = m$ existerar har $y = f(x)$ en vågrät asymptot $y = m$ då $x \to \infty$. Om g.v. ej existerar gå till 2.
2.
   a. Undersök om g.v. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existerar. Om så är fallet gå till 2b.

   b. Undersök om g.v. $m = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - kx$ existerar.

   Om båda g.v. (k och m) existerar har kurvan $y = f(x)$ den sneda asymptoten $y = kx + m$ då $x \to \infty$.

Gör motsvarande analys även då $x \to -\infty$.

Exempel 25

Bestäm ev asymptoter till kurvan $y = f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{x^2 - 1}$

Asymptoter

Anm: För rationella funktioner kan man alltid finna sneda asymptoter med polynomdivision:

För $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{x^2 - 1}$ får vi:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad\quad 2x - 1 \\
\cline{2-2}
x^2 - 1 & 2x^3 - x^2 \\
 & -2x^3 \quad\quad + 2x \\
\cline{2-2}
 & \quad -x^2 + 2x \\
 & \quad\; x^2 \quad\quad - 1 \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad 2x - 1
\end{array}
\quad \Rightarrow f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - 1} = \underbrace{2x - 1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{2x - 1}{x^2 - 1}
$$

Exempel 26

Har kurvan $y = f(x) = \sqrt{x}$ någon sned asymptot då $x \to \infty$?

Gränsvärden och asymptoter i Mathematica

- Gränsvärden:
```
Limit[2x+3-1/Log[x],x->Infinity]
```
- Asymptoter:
```
f[x_]:= 2x+3-1/Log[x]
k = Limit[f[x]/x,x->Infinity]
Limit[f[x]-k*x,x->Infinity]
```