MA2001 Envariabelanalys

Något om primitiva funktioner

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

20 november 2024

Primitiva funktioner

Exempel 1

Bestäm en funktion $F(x)$ sådan att $F'(x) = \cos x$.
Svar: Vi kan t ex välja $F(x) = \sin x$.

Exempel 2

Bestäm alla funktioner $F(x)$ för vilka $F'(x) = x^2$.

Svar: $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ där C är en godtycklig konstant.

Definition 1

- $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ på intervallet I om $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.
- Beteckning: $\int f(x)dx =$ mängden av alla primitiva funktioner till $f(x)$.

Med hjälp av deriveringsreglerna får vi

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \qquad \int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

Primitiva funktioner

Exempel 3

Bestäm $\int \sin^2 x \, dx$

Vi har $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Exempel 4

Bestäm $\int 4\sin^3 x \cos x \, dx$

$$\int \underbrace{4\sin^3 x}_{f'(g)} \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \, dx = \sin^4 x + C$$

Allmänt: $\int f'(g)g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$ (Kedjeregeln baklänges)

Primitiva funktioner

Exempel 5

Bestäm $D \ln |x|$.

$$\left.\begin{aligned} x > 0: &\quad D\ln|x| = D\ln x = \frac{1}{x} \\ x < 0: &\quad D\ln|x| = D\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

Några primitiva funktioner:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

- Med deriveringsreglerna kan vi derivera alla funktioner som är sammansatta av elementära funktioner och de fyra räknesätten.
- Att bestämma primitiva funktioner är i allmänhet svårt.
- För de flesta funktioner finns inte en primitiv funktion som kan uttryckas med elementära funktioner. Ett exempel är $f(x) = e^{x^2}$.

Partiell integration

Exempel 6

- $\int x \sin x \, dx = ?$
- $\int x^2 e^x \, dx = ?$
- $\int e^x \sin x \, dx = ?$
- $\int \ln x \, dx = ?$
- $\int \arctan x \, dx = ?$

Antag att $F'(x) = f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar:

$$
\begin{aligned}
D(F \cdot g) &= F' \cdot g + F \cdot g' = f \cdot g + F \cdot g' \\
&\Leftrightarrow f \cdot g = D(F \cdot g) - F \cdot g' \\
&\Leftrightarrow \int f \cdot g \, dx = \int D(F \cdot g) dx - \int F \cdot g' dx
\end{aligned}
$$

Sats 1 (Partiell integration)

Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ och om $g(x)$ är deriverbar så är

$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx$$

Partiell integration

Exempel 6 (Forts.)

$$\int x \sin x \, dx = ? \qquad \int \ln x \, dx = ?$$

Partiell integration

$$\int f \cdot g = F \cdot g - \int F \cdot g'$$

$$\begin{aligned}
\int \underset{f}{\sin x}\, \underset{g}{x} dx &= (\underset{F}{-\cos x})\underset{g}{x} - \int (\underset{F}{-\cos x}) \cdot \underset{g'}{1} \, dx \\
&= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C \\
\int \ln x \, dx &= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{g}{\ln x} \, dx = \underset{F}{x} \underset{g}{\ln x} - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{g'}{\frac{1}{x}} dx = x \ln x - x + C
\end{aligned}$$

Exempel 7

Bestäm *a*) $\int x^2 e^x \, dx$ *b*) $\int \arctan x \, dx$ *c*) $\int e^x \sin x \, dx$

Variabelsubstitution

Exempel 8

Bestäm $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ och $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{f'(g)=\frac{1}{g}} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \ln|\underbrace{1+e^x}_{>0}| + C = \ln(1+e^x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Vad händer om vi byter variabel och sätter $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t,\ t > 0$:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\underbrace{dx}_{?} = ?$$

Variabelsubstitution

Antag att $F'(x) = f(x)$ och $x = g(t)$. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} D(F(g(t))) &= F'(g(t)) \cdot g'(t) \\ \Rightarrow \int f(x)\,dx &= F(x) + C = F(g(t)) + C = \int D(F(g(t)))\,dt \\ &= \int F'(g(t))g'(t)\,dt \end{aligned}$$

Sats 2 (Variabelsubstitution)

Om $x = g(t)$ och $f(x)$ och $g'(t)$ är kontinuerliga så är

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,\underbrace{g'(t)\,dt}_{dx}$$

Variabelsubstitution

Exempel 8 (Forts.)

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Variabelsubstitution

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,\underbrace{g'(t)\,dt}_{dx}$$

Sätt $t = e^x \Leftrightarrow x = g(t) = \ln t,\ t > 0,$
$dx = g'(t)\,dt = \frac{1}{t}\,dt$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{1}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{1}{1+t}\underbrace{\frac{1}{t}\,dt}_{dx} = \int \frac{1}{(1+t)t}\,dt = \int \frac{1+t-t}{(1+t)t}\,dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \ln|\underbrace{t}_{>0}| - \ln|\underbrace{1+t}_{>0}| + C \\
&= \ln t - \ln(1+t) + C = x - \ln(1+e^x) + C
\end{aligned}$$

Sammanfattning:

1. Sätt $x = g(t)$, bestäm $g'(t) = \frac{dx}{dt}$ och ”lös ut” dx: $dx = g'(t)\,dt$
2. Beräkna $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$
3. Återgå till variabeln x

Variabelsubstitution

Exempel 9

Bestäm $\int 2x(1+x^2)^2\,dx$, $x \geq 0$.

Sätt $t = x^2$, $x \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$:

$$\Rightarrow \int 2x(1+x^2)^2 dx = \int 2\sqrt{t}(1+t)^2 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \int (1+t)^2 dt$$

$$= \frac{(1+t)^3}{3} + C = \frac{(1+x^2)^3}{3} + C$$

Obs!

$$\int 2x(1+x^2)^2 dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{3(\overbrace{1+x^2}^{f(x)})^2}_{D(f^3)=3f^2} \cdot \underbrace{2x}_{f'(x)}\,dx = \frac{(f(x))^3}{3} + C = \frac{(1+x^2)^3}{3} + C$$

Allmänt: $\int (f(x))^\alpha f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1.$

Variabelsubstitution

Exempel 10

Bestäm $\displaystyle\int \tan x \, dx$.

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Sätt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx \Leftrightarrow dx = -\dfrac{dt}{\sin x}$

$$\Rightarrow \int \tan x \, dx = -\int \frac{\sin x}{t} \frac{1}{\sin x} \, dt = -\int \frac{1}{t} \, dt = -\ln|\cos x| + C$$

Anm:

1) $$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{f'(g(x))} (\underbrace{-\sin x}_{g'(x)}) \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

2) $$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{\overbrace{-\sin x}^{f'(x)}}{\underbrace{\cos x}_{f(x)}} \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

Allmänt: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$

Variabelsubstitution

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 11

Bestäm $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Lösning:

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{f'(x)}}{\underbrace{\ln x}_{f(x)}}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Bestämning av primitiva funktioner i Mathematica:

- `Integrate[Cos[x],x]`

OBS! Mathematica ger svaret $\sin x$ dvs en funktion vars derivata är $\cos x$.

Exempel 12

Bestäm a) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \cos\sqrt{1+x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

Integration av rationella funktioner

Exempel 13

$$\int \frac{2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx = ?$$

- Vi söker en metod för att bestämma en primitiv funktion till en godtycklig rationell funktion

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \qquad g \text{ och } h \text{ polynom med reella koefficienter.}$$

- Vi kan anta att $\mathrm{grad}(g) < \mathrm{grad}(h)$. Annars kan vi göra en polynomdivision:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)} \quad \text{där } \mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(h).$$

- Till polynomet $q(x)$ är det sedan lätt att bestämma en primitiv funktion.

Integration av rationella funktioner

Exempel 14

Bestäm $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{x+1}\,dx$.

Lösning:

$\text{grad}(x^3-2x)=3>\text{grad}(x+1)=1$: Gör polynomdivision!

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 \quad -x-1 \\ \hline
x+1 & x^3 \qquad\quad -2x \\
 & \underline{-x^3-x^2} \\
 & -x^2-2x \\
 & \underline{x^2 \quad +x} \\
 & -x \\
 & \underline{x+1} \\
 & 1
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad x^3-2x=(x^2-x-1)(x+1)+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^3-2x}{x+1}=x^2-x-1+\frac{1}{x+1}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{x^3-2x}{x+1}\,dx &= \int\left(x^2-x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C.
\end{aligned}
$$

Integration av rationella funktioner

Exempel 15

Bestäm $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x}\,dx$.

Lösning:

$\text{grad}(x^2-2x) = 2 > \text{grad}(1) = 1$: Polynomdivision behövs inte!

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-2x} &= \frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{2}\frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{2}\frac{2+x-x}{x(x-2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x(x-2)} - \frac{x-2}{x(x-2)}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)}_{\text{Partialbråksuppdelning av } \frac{1}{x^2-2x}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x| + C.$$

Ovanstående metod för är jobbig och fungerar endast för enkla funktioner.

$\therefore$ Vi behöver en generell metod för partialbråksuppdelning (PBU)!

Integration av rationella funktioner

Algebrans fundamentalsats och Faktorsatsen: Varje reellt polynom kan skrivas som en produkt av reella polynom av grad ≤ 2.

Exempel 16

$$\begin{aligned} h(x) &= 2x^{10} - 2x^9 - 20x^7 + 24x^6 - 16x^5 + 60x^4 - 76x^3 + 70x^2 - 78x + 36 \\ &= 2(x-1)^3(x-2)\underbrace{(x^2+2x+3)^2(x^2+1)}_{\text{Saknar reella nollställen}} \end{aligned}$$

Man kan visa att om $h(x)$ är ett godtyckligt reellt polynom med $\text{grad}(h) > \text{grad}(g)$ så kan man alltid göra en partialbråksuppdelning av $f(x)$ enligt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{a_n(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}\cdots(x^2-b_1x+c_1)^{n_1}(x^2-b_2x+c_2)^{n_2}\cdots} \\ &= \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_1)^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} + \frac{B_1}{(x-r_2)} + \frac{B_2}{(x-r_2)^2} + \cdots \\ &+ \frac{C_1x+D_1}{(x^2-b_1x+c_1)} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2-b_1x+c_1)^2} + \cdots \end{aligned}$$

där de reella talen $A_1, A_2, ..., A_{m_1}, B_1, B_2, ..., C_1, C_2, ...$ är entydigt bestämda.

Integration av rationella funktioner

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 17

Med $h(x)$ i exemplet ovan får vi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{g(x)}{2x^{10} - 2x^9 - 20x^7 + 24x^6 - 16x^5 + 60x^4 - 76x^3 + 70x^2 - 78x + 36} \\
&= \frac{g(x)}{2(x-1)^3(x-2)\underbrace{(x^2+2x+3)^2(x^2+1)}_{\text{Saknar reella nollställen}}} \\
&= \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{C_1 x + D_1}{x^2+2x+3} \\
&\quad + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{E_2 x + F_2}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Hur bestämmer vi konstanterna $A_1, A_2, A_3, B_1, C_1, \ldots$?

Integration av rationella funktioner

Exempel 18

Partialbråksuppdela $\dfrac{2x^2 - x}{(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\neq 0}}$.

Ansats:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 - x}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{(A+B)\,x^2 + (C+B)\,x + A + C}{(x+1)\,(x^2+1)} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A + C &= 0 \\ C + B &= -1 \\ A + B &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C &= -A \\ -A + B &= -1 \\ A + B &= 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} C &= -A \\ -A + B &= -1 \\ 2B &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= \frac{3}{2} \\ B &= \frac{1}{2} \\ C &= -\frac{3}{2} \end{cases} \\
&\therefore \quad \frac{2x^2 - x}{(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x+1} + \frac{x-3}{x^2+1}\right).
\end{aligned}$$

Integration av rationella funktioner

Exempel 19

Bestäm $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$.

Pol.div. behövs ej! Faktorisering av nämnaren: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
PBU:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2-3x+2} &= \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\
&= \frac{(A+B)\,x-2A-B}{(x-1)(x-2)} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A+B &= 1 \\ -2A-B &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B &= 1 \\ -A &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-3x+2} = -\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx &= \int \left(-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right) dx \\
&= -2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C.
\end{aligned}
$$

Integration av rationella funktioner

PBU kan ge termer av typen $\underbrace{\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}}_{\text{Saknar reella nollst.}}$. Hur integrerar vi dessa?

Exempel 20 (a)

Bestäm $\displaystyle\int \frac{x-1}{\underbrace{x^2+2x+2}_{\text{Saknar reella nollst.}}}\,dx$.

Lösning:

Kvadratkomplettering av nämnaren $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{x-1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{x-1}{(x+1)^2+1}dx = \begin{bmatrix} t=x+1 \Leftrightarrow x=t-1 \\ dx=dt \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{t-2}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - 2\arctan t + C \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| - 2\arctan(x+1) + C
\end{aligned}$$

Integration av rationella funktioner

I det allmänna fallet får vi efter PBU, kvadratkomplettering och variabelsubstitution två varianter:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx \quad \text{och} \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Den första är enkel:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C, & n = 1 \\ \dfrac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + C, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

Integration av rationella funktioner

För den andra kan vi ta fram en rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = x\cdot\frac{1}{(x^2+1)^n} - \int \frac{x\cdot(-n)2x}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= x\cdot\frac{1}{(x^2+1)^n} + 2n\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= x\cdot\frac{1}{(x^2+1)^n} + 2n\left(\underbrace{\int\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx}_{I_n} - \underbrace{\int\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx}_{I_{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

Vi får:

$$\begin{cases}
I_1 &= \displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C \\
I_{n+1} &= \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{2n}\left((2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+1)^n}\right),\ n\geq 1
\end{cases}$$

Exempel 20 (b)

Bestäm $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2\cdot 1}\left((2\cdot 1-1)I_1 + \frac{x}{(x^2+1)^1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + C.\end{aligned}$$

Integration av rationella funktioner

Sammanfattning:

Integrera rationella funktioner $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ enligt följande schema:

1. Gör polynomdivision om grad$(g) >$ grad (h).
2. Faktorisera $h(x)$ så långt som möjligt i reella polynom av grad $\leqslant 2$.
3. Gör partialbråksuppdelning.
4. Kvadratkomplettera vid behov de nämnare som är av 2:a graden.
5. Integrera varje partialbråk.

Partialbråksuppdelning i Mathematica:

- `Apart[(2x^2-x)/((x+1)(x^2+1))]`

Exempel 21

Bestäm a) $\displaystyle\int \frac{2x^4+5x^3+4x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^{3/2}+x}\,dx$