Ex9 Bestäm $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x(e^x - 1 - x)}$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

- Nämnaren:

$$x(e^x - 1 - x) = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) - 1 - x\right) = x\left(\frac{x^2}{2} + O(x^3)\right) = \frac{x^3}{2} + O(x^4)$$

- Vi utvecklar täljaren t.o.m. ordn 3:

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) - x = -\frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x - x}{x(e^x - 1 - x)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{\frac{x^3}{2} + O(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{\frac{1}{2} + O(x)} \to \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}} \text{ då } x \to 0$$

Ex 10 Best Maclaurinutv till $e^{\sin x}$ (ordn 3)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\Rightarrow e^{\sin x} \underset{\uparrow}{=} 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3!} + \frac{(\sin x)^4}{4!} + \dots$$

$\sin x \to 0$ då $x \to 0$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right) + \frac{(x + O(x^3))^2}{2} + \frac{(x + O(x^3))^3}{3!} + O(x^4)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) + \frac{x^2}{2} + O(x^4) + \frac{x^3}{6} + O(x^5) + O(x^4)$$

$$= \underline{\underline{1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^4)}}$$

$e^{\cos x}$: $\cos x \not\to 0$ då $x \to 0$!

Omskrivning: $e^{\cos x} = e^{\cos x + 1 - 1} = e \cdot e^{\overbrace{\cos x - 1}^{\to 0 \text{ då } x \to 0}} = \dots$

Ex 11 Bestäm $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} + \ln(1+x) - 1}{\arctan(-x) + \sin x}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \Rightarrow \arctan(-x) = -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Nämnaren:

$$\arctan(-x) + \sin x = -x + \frac{x^3}{3} + O(x^5) + x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) = \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

Vi utv täljaren tom ordn 3:

$$e^{-x} + \ln(1+x) - 1 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + O(x^4) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) - 1$$

$$= \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x} + \ln(1+x) - 1}{\arctan(-x) + \sin x} = \frac{\frac{x^3}{6} + O(x^4)}{\frac{x^3}{6} + O(x^5)} = \frac{\frac{1}{6} + O(x)}{\frac{1}{6} + O(x^2)} \to \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1 \text{ då } x \to 0.$$

Ex 12 Bestäm $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2x\cos x}{x + \arctan x - (x+2)\ln(1+x)}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \Rightarrow \sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

- Nämnaren:

$$x + \arctan x - (x+2)\ln(1+x) = x + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots - (x+2)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right)$$

$$= \cancel{x} + \cancel{x} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots - \left(\cancel{x^2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \dots + \cancel{2x} - \cancel{x^2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \dots\right)$$

$$= -\frac{x^3}{2} + O(x^4)$$

- Utv täljaren t.o.m. ordn 3:

$$\sin 2x - 2x\cos x = 2x - \frac{4x^3}{3} + O(x^5) - 2x\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = -\frac{x^3}{3} + O(x^5)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2x - 2x\cos x}{x + \arctan x - (x+2)\ln(1+x)} = \frac{-\frac{x^3}{3} + O(x^5)}{-\frac{x^3}{2} + O(x^4)} = \frac{-\frac{1}{3} + O(x^2)}{-\frac{1}{2} + O(x)} \to \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \text{ då } x \to 0.$$