MA2001 Envariabelanalys

Något om polynomapproximationer

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

9 december 2024

Maclaurins formel

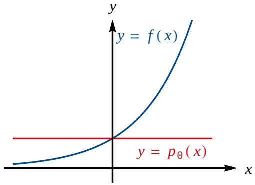
Antag att vi söker ett approximativt värde på en funktion $f(x)$ i en punkt x som ligger nära 0.

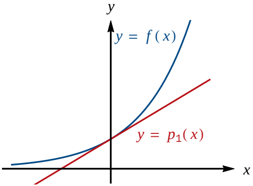
- Grov approx: $f(x) \approx f(0) = p_0(x) \quad \leftarrow$ 0:te-grads polynom
- Bättre approx: $f(x) \approx$ tangenten till $y = f(x)$ i $x = 0$.
  Tangentens ekvation: $y = kx + m = f'(0)x + f(0)$

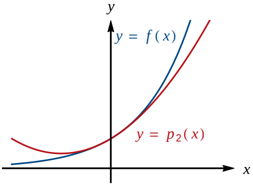
$$\therefore f(x) \approx p_1(x) = f(0) + f'(0)x \quad \leftarrow \text{1:a-grads polynom}$$

- Ännu bättre approx: ”Böj” tangenten dvs lägg till x^2-term:

$$f(x) \approx p_2(x) = f(0) + f'(0)x + ax^2 \quad \leftarrow \text{2:a-grads polynom}$$







Maclaurins formel

Hur ska vi välja talet a ? Kräv att $p_2(x) = f(0) + f'(0)x + ax^2$ ska ha samma 1:a- och 2:a-derivata som $f(x)$ i $x = 0$:

$$\begin{aligned} p_2'(x) &= f'(0) + 2ax \Rightarrow p_2'(0) = f'(0) \quad \text{Ok!} \\ p_2''(x) &= 2a \Rightarrow p_2''(0) = 2a = f''(0) \Leftrightarrow a = \frac{f''(0)}{2} \\ \Rightarrow f(x) &= \underset{approx}{p_2(x)} + \underset{restterm}{R_2(x)} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + R_2(x) \end{aligned}$$

$R_2(x) =$ resttermen $=$ felet i approximationen $f(x) \approx p_2(x)$
För högre noggrannhet kan vi approximera $f(x)$ med $p_3(x), p_4(x), \ldots$.

Exempel 1

Undersök hur stort felet blir om e^x approximeras med $p_1(x)$ och $p_2(x)$ om $x = 0.01$ respektive $x = 0.4$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = e^x \\ \Rightarrow & \begin{cases} p_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x \\ p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Maclaurins formel

Exempel 2

Felet i approximationerna $e^x \approx p_1(x) = 1 + x$ och $e^x \approx p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$:

$$\begin{aligned} R_1(0.01) &= e^{0.01} - p_1(0.01) = e^{0.01} - (1 + 0.01) \\ &= 5.0167... \cdot 10^{-5} < 0.01\% \text{ fel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1(0.4) &= e^{0.4} - p_1(0.4) = e^{0.4} - (1 + 0.4) \\ &= 9.1824... \cdot 10^{-2} \approx 6\% \text{ fel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2(0.01) &= e^{0.01} - p_2(0.01) = e^{0.01} - (1 + 0.01 + \frac{0.01^2}{2}) \\ &= 1.6708... \cdot 10^{-7} < 0.0001\% \text{ fel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2(0.4) &= e^{0.4} - p_2(0.4) = e^{0.4} - (1 + 0.4 + \frac{0.4^2}{2}) \\ &= 1.1824... \cdot 10^{-2} \approx 0.8\% \text{ fel} \end{aligned}$$

Maclaurins formel

Vad blir $R_1(x)$ dvs felet i approximationen $f(x) \approx p_1(x) = f(0) + f(0)x$?

Eftersom $\int_0^x f'(t)dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0)$ ger partiell integration:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t)dt = f(0) + \left[f'(t)t\right]_0^x - \int_0^x f''(t)tdt \\
&= f(0) + f'(x)x - \int_0^x f''(t)tdt = f(0) + \left(f'(0) + \int_0^x f''(t)dt\right)x - \int_0^x f''(t)tdt \\
&= f(0) + f'(0)x + \int_0^x f''(t)(x-t)dt = p_1(x) + R_1(x)
\end{aligned}
$$

Med integralkalkylens generaliserade medelvärdessats får vi nu

$$
R_1(x) = \int_0^x f''(t)(x-t)dt = f''(\xi)\int_0^x (x-t)dt = f''(\xi)\left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right]_0^x = \frac{f''(\xi)x^2}{2}
$$

där ξ beror på x och ligger mellan 0 och x.

Maclaurins formel

Partiell integration av $\int_0^x f''(t)(x-t)dt$ i beräkningen av $R_1(x)$ ger pss

$$\begin{aligned}\int_0^x f''(t)(x-t)dt &= \left[f''(t)\frac{-(x-t)^2}{2}\right]_0^x + \int_0^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt \\ &= \frac{f''(0)x^2}{2} + f^{(3)}(\xi)\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}dt = \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(\xi)x^3}{3!}\end{aligned}$$

och vi får

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(\xi)x^3}{3!} = p_2(x) + R_2(x)$$

osv.

Maclaurins formel

Med induktion kan man nu visa:

Sats 1 (Maclaurins formel)

Om f har kontinuerliga derivator av ordning $\leq n+1$ kring $x=0$ så är

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + R_n(x) \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \end{aligned}$$

För resttermen gäller

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = B(x)x^{n+1}$$

där ξ är ett tal mellan 0 och x och $B(x)$ är begränsad nära $x=0$.

Anm: För Maclaurinpolynomet $p_n(x)$ gäller $p_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ för $1 \leq k \leq n$

Maclaurins formel

Exempel 3

Vi kan bestämma ett närmevärde till talet e. Utveckling t o m ordning 5:

$$
\begin{aligned}
e^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(5)}(0)x^5}{5!} + \frac{f^{(6)}(\xi)x^6}{6!} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\xi}x^6}{6!} \quad (\xi \text{ tal mellan } 0 \text{ och } x) \\
\Rightarrow e &= e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{5!} + \frac{e^{\xi}}{6!} = \frac{163}{60} + \frac{e^{\xi}}{720}, \quad 0 \leq \xi \leq 1
\end{aligned}
$$

Vi har alltså

$$
\begin{aligned}
0 &\leq e - \frac{163}{60} = \frac{e^{\xi}}{720} \leq \frac{e}{720} < \frac{3}{720} = \frac{1}{240} \\
&\Leftrightarrow \frac{163}{60} \leq e \leq \frac{163}{60} + \frac{1}{240} \\
&\Leftrightarrow 2.71666... \leq e \leq 2.71666... + 0.00416667... = 2.72083...
\end{aligned}
$$

$$\therefore e = 2.72 \pm 0.5 \cdot 10^{-2}$$

Anm: Närmevärdet $e \approx 2.72$ har 2 korrekta decimaler.

Ordobegreppet

Definition 1

Om $B(x)$ är begränsad nära $x = 0$ sätter vi

$$B(x)x^n = \mathcal{O}(x^n) \quad \leftarrow \quad \text{(Stort) ordo } x^n$$

Exempel 4

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + B(x)x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

Anm: $\mathcal{O}(x^n)$ är ett mått på storleksordning dvs en egenskap inte en funktion.

Anm: Att $f(x) = \mathcal{O}(x^3)$ betyder att $f(x)$ går mot noll minst lika fort som x^3.

Ordobegreppet

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 5

- $\mathcal{O}(x^2) \pm \mathcal{O}(x^3) = B_1(x)x^2 \pm B_2(x)x^3 = \underbrace{(B_1(x) \pm B_2(x)x)}_{B(x)}x^2 = \mathcal{O}(x^2)$
- $x^5 \cdot \mathcal{O}(x^3) = x^5 \cdot B(x)x^3 = B(x)x^8 = \mathcal{O}(x^8)$
- $\mathcal{O}(x^2) \cdot \mathcal{O}(x^3) = B_1(x)x^2 \cdot B_2(x)x^3 = \underbrace{B_1(x)B_2(x)}_{B(x)}x^5 = \mathcal{O}(x^5)$
- $\mathcal{O}(x^2) - \mathcal{O}(x^2) = B_1(x)x^2 - B_2(x)x^2 = \underbrace{(B_1(x) - B_2(x))}_{B(x)}x^2 = \mathcal{O}(x^2)$

Räkneregler för ordo

- $\lim_{x\to 0} \mathcal{O}(x^n) = \begin{cases} 0 \text{ om } n > 0 \\ \infty \text{ om } n < 0 \end{cases}$
- $\mathcal{O}(a \cdot x^n) = a \cdot \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
- $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = x^m \cdot \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^{n+m})$
- $\mathcal{O}(x^n) \pm \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$, $n \leq m$

OBS!

$f(x) = \mathcal{O}(x^3) \Rightarrow f(x) = \mathcal{O}(x^2)$

$f(x) = \mathcal{O}(x^2) \not\Rightarrow f(x) = \mathcal{O}(x^3)$

Taylors formel

Om vi istället approximerar $f(x)$ nära $x = a$ får vi:

Sats 2 (Taylors formel)

Om f har kontinuerliga derivator av ordning $\leq n+1$ kring $x = a$ så är

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

Resttermen

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

där ξ är ett tal mellan a och x.

Anm: Maclaurins formel är alltså Taylors formel med $a = 0$.

Maclaurinutvecklingar

Exempel 6

Bestäm Maclaurinutvecklingen av $\sin x$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \Rightarrow f(0) = 0 \\
f'(x) &= \cos x \Rightarrow f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \\
&\vdots \\
\Rightarrow \sin x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)}{4!} + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)
\end{aligned}
$$

Maclaurinutvecklingar

Anm: Man kan visa att Maclaurinutvecklingen är entydig dvs om

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + B(x)x^{n+1}$$

där $B(x)$ är begränsad nära $x = 0$ så är detta Maclaurinutvecklingen av $f(x)$.

Exempel 7

Bestäm Maclaurinutvecklingen av e^{x^2}.
Eftersom $x^2 \to 0$ då $x \to 0$ ger entydigheten

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x^2)^n}{n!} + \mathcal{O}((x^2)^{n+1}) \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Anm: Om x ersätts med $g(x)$ i Maclaurinutvecklingen av $f(x)$ måste $g(x) \to 0$ då $x \to 0$ för att resultatet ska vara Maclaurinutvecklingen av $f(g(x))$.

Maclaurinutvecklingar

För alla x i respektive funktioners definitionsmängder gäller

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x)
\end{aligned}
$$

där $R_m(x) = \mathcal{O}(x^{m+1}) \to 0$ då $x \to 0$

Anm: $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Maclaurinutvecklingar

Exempel 8

Beräkna ett approximativt värde på integralen

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx$$

med 3 korrekta decimaler.

Anm: Till integranden $\frac{1-\cos x}{x}$ finns ingen primitiv funktion (som kan skrivas upp som en ändlig summa eller produkt av elementära funktioner).

Anm: $x \approx y$ med n korrekta decimaler innebär att

$$|x-y| \leqslant 0.5 \cdot 10^{-n}$$

dvs felets storlek är högst en halv enhet i n:te decimalen.

Maclaurinutvecklingar

Exempel 8 (Forts.)

Vi utvecklar $\cos x$ t o m ordning 4:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\cos(\xi)x^6}{6!}, \quad \xi \text{ mellan 0 och } x$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\cos(\xi)x^6}{6!})}{x} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + \frac{\cos(\xi)x^5}{720} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} \right) dx + \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos(\xi)x^5}{720} dx}_{\varepsilon} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} \right) dx + \varepsilon = \frac{23}{96} + \varepsilon \\
&= 0.23958333... + \varepsilon
\end{aligned}$$

Maclaurinutvecklingar

Exempel 8 (Forts.)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |\varepsilon| &= \left| \int_0^1 \frac{\cos(\xi)x^5}{720}\,dx \right| \underset{|\cos\xi|\le 1}{\leqslant} \int_0^1 \frac{|x|^5}{720}\,dx = \int_0^1 \frac{x^5}{720}\,dx = \frac{1}{4320} \\
&= 2.3148\ldots \cdot 10^{-4} \leqslant 0.5 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx = 0.240 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}
$$

Taylorutvecklingar i Mathematica

- Maclaurinutveckling av $\sin x$ t o m ordning 4:
  `Series[Sin[x],{x,0,4}]`
- Taylorutveckling av e^{x^2} kring $x = 2$ t o m ordning 5:
  `Series[Exp[x^2],{x,2,5}]`

Maclaurinutvecklingar

Exempel 9

Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x(e^x - 1 - x)}$

Exempel 10

Beräkna Maclaurinpolynomet av ordning 3 till $e^{\sin x}$ och $e^{\cos x}$

Exempel 11 (Tentamen 120112)

Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + \ln(1 + x) - 1}{\arctan(-x) + \sin x}$ (2p)

Exempel 12 (Tentamen 110113)

Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x - 2x \cos x}{x + \arctan x - (x + 2) \ln(1 + x)}$ (3p)