

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Beräkna gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x})$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{2x - \sqrt{4x^2 - 2x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{2/x} - 1}{\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\arctan x^2}$$

2. (a) Beräkna gränsvärdena

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 3x \ln(1 + \sin 4x)}$$

(b) Är följande funktioner kontinuerliga?

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases} \quad (ii) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

(c) Visa att ekvationen $4x^3 - 20x^2 + 27x - 9 = 0$ har minst en rot i vardera av intervallen $]0, 1[$ och $]1, 2[$.

(d) Funktionerna nedan är inte definierade i punkten $x = 2$. Undersök om det möjligt att definiera funktionsvärdet $f(2)$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig även i $x = 2$ för:

$$i. f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4}, x \neq 2,$$

$$ii. f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 4}, x \neq 2,$$

$$iii. f(x) = \frac{(x-2)\ln(x-1)}{1 - \cos(2-x)}, x \neq 2.$$

3. Bestäm eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$ och skissera kurvan nära asymptoterna då

$$(a) f(x) = \frac{3x^3 - 4}{x^2 - 2}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^3(e^{-x^2} - 1)}{x^2 - 1}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^2 \arctan x}{x - 4}$$

$$(d) f(x) = e^{-1/x} x \arctan x$$

m -värdet i (d) får bestämmas med hjälp av Mathematica.

4. (a) Bestäm alla tangenter till kurvan $y = \tan 2x$, $-\pi/4 < x < \pi/4$, som är parallella med linjen $y = 2x + 1$.

(b) Bestäm alla räta linjer som är tangenter till kurvan $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ och som går genom punkten $(2, 0)$.

(c) Skär kurvorna $y = x^2$ och $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ varandra under rät vinkel?

(d) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$ i de punkter på kurvan där $x = 0$ respektive $x = 1$.

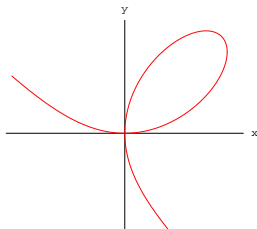
Vänd!

5. (a) Finns det några reella tal a och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 0 \\ (x+1)e^x, & x > 0 \end{cases}$$

blir deriverbar i $x = 0$?

- (b) Kurvan som definieras av $x^3 + y^3 = 6xy$ brukar kallas *Descartes blad* (Se figur 1).



Figur 1: Descartes blad.

- i. Bestäm tangenten till kurvan i punkten $(3, 3)$.
 - ii. Bestäm de punkter på kurvan där tangenten är horisontell respektive vertikal.
- (c) När en perfekt sfärisk snöboll smälter är smältningshastigheten i varje tidpunkt proportionell mot begränsningsarean och snöbollen behåller under hela smältprocessen sin sfäriska form. Visa att snöbollens radie avtar med konstant hastighet.
- (d) Raketingenjören Pelle avfyrrar en raket rakt uppåt från en startramp på marknivå. Raketen spåras av en radarstation på marknivå som befinner sig på avståndet 3 km från raketens startramp. Vid en viss tidpunkt efter start registrerar radarstationen att avståndet till raketens är 5 km och att detta ökar med 5000 km/h. Hur stor är raketens hastighet vid denna tidpunkt?