HÖGSKOLAN I HALMSTAD **Envariabelanalys**
Akademin för informationsteknologi Uppgiftspaket 2
Mikael Hindgren 13 november 2024

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

   (a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$

   (b) $f(x) = 2\arctan x - \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

   (c) $f(x) = \ln(1 + x^2) - \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$

   (d) $f(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 4x + 2)}{x - 1}$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag.

2. (a) Hur många lösningar har ekvationen

   $$\frac{e^x + x}{e^x - x} = k$$

   för olika värden på den reella konstanten k?

   (b) På höjden 20 m över marken sitter en gatlampa. En mörk kväll släpper Boll-Kalle en liten boll från samma höjd men 10 m från lampan. Med vilken hastighet rör sig bollens skugga på marken

   i. 1 s efter att bollen släppts?
   ii. precis innan bollen träffar marken?

   Luftmotståndet kan försummas.

   (c) Kajsa ska bygga en rektangelformad plåtlåda. Från en rektangulär plåt, vars längd är dubbelt så stor som dess bredd b, klipper hon bort en bit av plåten i varje hörnen och viker ihop den resterande sammanhängande plåtbiten till en sluten låda (med lock). Vilken är lådans största möjliga volym?

3. (a) Bestäm de värden på den reella konstanten k för vilka $\ln 2x \leq kx \leq e^{x/2}$ för alla $x > 0$.

   (b) I en punkt på kurvan $y = x^4$, $x > 0$, dras kurvans tangent och normal. Dessa avgränsar tillsammans med y-axeln en triangel. Bestäm minsta möjliga area hos denna triangel.

   (c) Ett cylindriskt rör med radien r används för ledning av varmvatten. Röret förlorar värme till den omgivande luften men värmeförlusten kan reduceras genom att röret isoleras. Kostnaden för värmeförlusten per längdenhet är $v(d) = 8/(r + d)$, där d är isoleringens tjocklek, och isoleringskostnaden per längdenhet är $i(d) = 2d$. Vilken isoleringstjocklek minimerar den totala kostnaden för $r = 1$ respektive $r = 3$ och vad blir kostnaden i dessa fall?

4. (a) Bestäm den punkt på kurvan $y = 1 - x^2$ där tangenten till kurvan skär ut den minsta möjliga triangeln ur första kvadranten.

   (b) Ett företag ska transportera varor från ett lager i punkten $(0, 0)$ till en distributionscentral i punkten $(1, 1)$. De startar genom att följa en väg längs linjen $y = 3x$ till en kostnad av k per längdenhet. Vid en viss punkt avviker de från linjen och tar kortaste vägen till slutdestinationen till en kostnad av $\frac{5k}{3}$ per längdenhet. Vilken är den optimala vägen som minimerar transportkostnaden och vad blir minimikostnaden?

   (c) Konstingenjören Sara hänger upp en fin tavla med höjden h på en vägg så att tavlans nedre kant hamnar sträckan d ovanför Saras ögonhöjd. På vilket avstånd från väggen ska Sara stå för att hon ska se hela tavlan på bästa sätt? Du kan anta att Sara har mycket bra syn.

Vänd!

5. (a) Varje sida i en rektangel går genom ett hörn i en mindre rektangel med sidorna a och b. Bestäm största möjliga arean av den större rektangeln.

(b) En 10 m lång stege lutar mot ett 3 m högt staket. Botten av stegen dras bort från staketet med farten 1.5 m/s. Med vilken fart rör sig toppen av stegen i

i. vertikal riktning

ii. horisontell riktning

då avståndet mellan staketet och stegens botten är 4 m?

(c) Stridsvagnsingenjören Maria färdas i en gammal stridsvagn modell V-S80 längs den positiva y-axeln i riktning mot origo. Stridsvagnens fart är hela tiden proportionell mot avståndet till origo. Vid en viss tidpunkt befinner sig Maria 4 km från origo och 10 min senare har hon förflyttat sig ytterligare 2 km. Den elake kanoningenjören Pelle sitter och lurpassar med en stor kanon någonstans på den positiva x-axeln. Maria vet att han är där men ser honom ännu inte eftersom en hög mur befinner sig längs kurvan $xy = 1$. Hur snabbt måste kanontornet på modell V-S80 kunna vridas för att Maria ska ha störst chans att överleva om Pelle

i. sitter i punkten $x = a > 0$?

ii. kan befinna sig var som helst på den positiva x-axeln?

Ledning: Alla funktioner som uppfyller $y'(t) = ky(t)$ kan skrivas som $y(t) = Ae^{kt}$.